練習問題　解答

第1章

問1-1

(1) $\dfrac{6}{\dfrac{3}{5}}=6\times\dfrac{5}{3}=\dfrac{30}{3}=10$　割る数$\left(\dfrac{3}{5}\right)$の逆数$\left(\dfrac{5}{3}\right)$をかけます

別解　$\dfrac{6}{\dfrac{3}{5}}=\dfrac{6\times5}{\dfrac{3}{5}\times5}=\dfrac{30}{3}=10$

(分母の5を払うため分母・分子に5をかけます)

(2) $\dfrac{3}{1-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{3}{\dfrac{1}{2}}=3\times2=6$　割る数$\left(\dfrac{1}{2}\right)$の逆数$\left(\dfrac{2}{1}=2\right)$をかけます

別解　$\dfrac{3}{1-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{3\times2}{\dfrac{1}{2}\times2}=6$

(分母の2を払うため分母・分子に2をかけます)

(3) $\dfrac{\dfrac{7}{2}}{3}=\dfrac{7}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{7}{6}$　割る数(3)の逆数$\left(\dfrac{1}{3}\right)$をかけます

別解　$\dfrac{\dfrac{7}{2}}{3}=\dfrac{\dfrac{7}{2}\times2}{3\times2}=\dfrac{7}{6}$

(分子の2を払うため分母・分子に2をかけます)

(4) $\dfrac{2-\dfrac{2}{3}}{5}=\dfrac{6-2}{3}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{4}{3}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{4}{15}$　割る数(5)の逆数$\left(\dfrac{1}{5}\right)$をかけます

別解　$\dfrac{2-\dfrac{2}{3}}{5}=\dfrac{\dfrac{6}{3}-\dfrac{2}{3}}{5}=\dfrac{\dfrac{4}{3}}{5}=\dfrac{\dfrac{4}{3}\times3}{5\times3}=\dfrac{4}{15}$　(分子の3を払うため分母・分子に3をかけます)

問1-2

(1) $\dfrac{3.45}{0.69}=\dfrac{3.45}{\dfrac{69}{100}}=3.45\times\dfrac{100}{69}=\dfrac{345}{69}=5$　割る数$\left(\dfrac{69}{100}\right)$の逆数$\left(\dfrac{100}{69}\right)$をかけます

別解　$\dfrac{3.45}{0.69}=\dfrac{3.45\times100}{0.69\times100}=\dfrac{345}{69}=5$　(分母・分子に100をかけます)

(2) $\dfrac{\dfrac{0.4}{200}}{\dfrac{0.5}{25}}=\dfrac{0.4}{200}\times\dfrac{25}{0.5}=\dfrac{0.4}{8}\times\dfrac{1}{0.5}=\dfrac{0.4}{4}=\dfrac{1}{10}$　割る数$\left(\dfrac{0.5}{25}\right)$の逆数$\left(\dfrac{25}{0.5}\right)$をかけます

(3) $\dfrac{0.2}{0.15\times0.1}=\dfrac{0.2}{0.015}=\dfrac{2}{0.15}=2\times\dfrac{100}{15}=2\times\dfrac{20}{3}=\dfrac{40}{3}$　割る数$\left(\dfrac{15}{100}\right)$の逆数$\left(\dfrac{100}{15}\right)$をかけます

別解　$\dfrac{0.2}{0.15\times0.1}=\dfrac{0.2\times1000}{0.15\times0.1\times1000}=\dfrac{200}{15}=\dfrac{40}{3}$　(分母・分子に1000をかけます)

(4) $$\frac{\frac{0.2}{0.3}}{0.15\left(1-\frac{0.2}{0.3}\right)}=\frac{\frac{0.2}{0.3}}{0.15\left(\frac{0.3-0.2}{0.3}\right)}=\frac{\frac{0.2}{0.3}}{0.15\times\frac{0.1}{0.3}}=\frac{\frac{0.2}{0.3}}{\frac{0.015}{0.3}}=\frac{0.2}{0.3}\times\frac{0.3}{0.015}$$

$$=\frac{0.2}{0.015}=\frac{0.2\times1000}{0.015\times1000}=\frac{200}{15}=\frac{40}{3}$$

（式を展開したのち、分母・分子に1000をかけます）

別解 $$\frac{\frac{0.2}{0.3}}{0.15\left(1-\frac{0.2}{0.3}\right)}=\frac{\frac{2}{3}}{0.15\left(1-\frac{2}{3}\right)}=\frac{\frac{2}{3}}{0.15\times\frac{1}{3}}=\frac{\frac{2}{3}\times3}{0.15\times\frac{1}{3}\times3}=\frac{2}{0.15}$$

$$=\frac{2\times100}{0.15\times100}=\frac{200}{15}=\frac{40}{3}$$

問1-3

(1) $$\frac{ax-1}{a-\frac{1}{x}}=\frac{ax-1}{\frac{ax-1}{x}}=(ax-1)\times\frac{x}{ax-1}=x$$

分母の計算をしてから、割る数$\left(\frac{ax-1}{x}\right)$の逆数$\left(\frac{x}{ax-1}\right)$をかけます

(2) $$\frac{x-2}{1-\frac{1}{x-1}}=\frac{x-2}{\frac{x-1-1}{x-1}}=\frac{x-2}{\frac{x-2}{x-1}}=(x-2)\times\frac{x-1}{x-2}=x-1$$

分母の計算をしてから、割る数$\left(\frac{x-2}{x-1}\right)$の逆数$\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$をかけます

(3) $$1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{2}}}=1-\frac{1}{1-\frac{1}{0.5}}=1-\frac{1}{1-2}=1-(-1)=2$$

最初に、分母の計算をします

(4) $$1-\frac{1}{1+\frac{1}{1-\frac{1}{a}}}=1-\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{a-1}{a}}}=1-\frac{1}{1+\frac{a}{a-1}}=1-\frac{1}{\frac{a-1+a}{a-1}}=1-\frac{1}{\frac{2a-1}{a-1}}$$

$$=1-\frac{a-1}{2a-1}=\frac{2a-1-(a-1)}{2a-1}=\frac{a}{2a-1}$$

最初に、分母の計算をしてから、割る数$\left(\frac{2a-1}{a-1}\right)$の逆数$\left(\frac{a-1}{2a-1}\right)$をかけます

問1-4

(1) $\frac{2}{5}=1.4-0.5t$　　$0.5t=1.4-0.4=1$　　$t=2$

(2) $\frac{50}{t}=10.0\times0.5^2=10.0\times0.25=2.5$　商と分母を入れ替えて　$t=\frac{50}{2.5}=20$

(3) $25=\frac{52.5\times2.0\times10^{-5}}{t+2.0\times10^{-5}}$　商と分母を入れ替えて　$t+2.0\times10^{-5}=\frac{52.5\times2.0\times10^{-5}}{25}$

$$t=\frac{52.5\times2.0\times10^{-5}}{25}-2.0\times10^{-5}=4.2\times10^{-5}-2.0\times10^{-5}=2.2\times10^{-5}$$

問1-5

(1) $G=H-ST$　(S)　$ST=H-G$　両辺をTで割って　$S=\dfrac{H-G}{T}$

(2) $A=\dfrac{B}{K_m+C}$　(K_m)　商と分母を入れ替えて　$K_m+C=\dfrac{B}{A}$　$K_m=\dfrac{B}{A}-C$

問1-6

(1) 25.043 m　有効数字5桁　有効数字と有効桁数の約束事の(a)から

(2) 0.00031 mg　有効数字2桁　有効数字と有効桁数の約束事の(b)から

(3) 6.51×10^{-3} g　有効数字3桁　有効数字と有効桁数の約束事の(e)から

(4) 5.00×10^{4}/μL　有効数字3桁　有効数字と有効桁数の約束事の(e)と(c)から

問1-7

(1) $7.8+2.073=9.8\cancel{7}3=9.9$　小数点以下の桁数が最も小さい桁数1桁に合わせて丸めます

(2) $1.020\times6.10=6.22\cancel{2}=6.22$　最小有効桁数の3桁に丸めます

(3) $2.50\times10^{20}\div(6.0\times10^{23})=0.41\cancel{6}67\times10^{-3}=4.2\times10^{-4}$　最小有効桁数の2桁に丸めます

問1-8

(1) 5%を100で割ります　⇒　0.05

(2) 0.025%に10000をかけます　⇒　250 ppm

(3) 4856 ppmに0.0001をかけます　⇒　0.4856%

問1-9

(1) 部分＝全体×割合から、$24.5\times\dfrac{12.5}{100}=3.0625$%

(2) 100 gずつですから、全量で200 gです。10%の食塩水100 g中に食塩は、部分＝全体×割合から、$100\times\dfrac{10}{100}=10$ g、25%の食塩水100 g中に食塩は$100\times\dfrac{25}{100}=25$ gがそれぞれ溶けています。したがって、求める濃度は、割合＝$\dfrac{部分}{全体}$から、

$$\frac{10+25}{200}\times100=\frac{35}{200}\times100=17.5\%$$

(3) 10%の食塩水を100 gと25%の食塩水を25 g混ぜると、全量で125 gになります。

部分＝全体×割合から、10%の食塩水100 g中に食塩は$100\times\dfrac{10}{100}=10$ gです。また、25%の食塩水25 g中に食塩は$25\times\dfrac{25}{100}=6.25$ gです。したがって、求める濃度は、割合＝$\dfrac{部分}{全体}$から、

$$\frac{10+6.25}{125}\times100=\frac{16.25}{125}\times100=0.13\times100=13\ \%$$

問1–10

(1)　食塩25 g（溶質）と水100 g（溶媒）を合わせたので溶液は125 gです。したがって、質量パーセント濃度の式から、$\frac{25}{25+100}\times100=$20wt％

(2)　ある薬剤100 mgは0.1 gですから、精製水100 mL中に、ある薬剤が0.1 g溶けていることになります。質量/体積パーセント濃度の式から、$\frac{0.1}{100}\times100=$0.1 w/v％

(3)　部分＝全体×割合から、95.1％のエタノール415 mLに純粋のエタノールは$415\times\frac{95.1}{100}=394.7$ mL含まれます。エタノール415 mLに精製水85 mLを加えると、500 mLとなります。

　体積パーセント濃度の式から、$\frac{394.7}{500}\times100=$78.94 vol％

問1–11

　塩化ナトリウム0.9 gを精製水に溶かして100 mLにしたので、質量/体積パーセント濃度の式から、$\frac{0.9}{100}\times100=$0.9 w/v％となります。

　溶液100 mL中に0.9 gの塩化ナトリウムが含まれているので、1 L中には、$\frac{0.9}{100}\times1000=9$ g含まれています。塩化ナトリウム9 gをモルに換算すると、$\frac{9}{58.44}=$0.154 molとなります。したがって、モル濃度は、0.154 mol/Lとなります。

問1–12

(1)　割合$=\frac{部分}{全体}$から、$100\times\frac{25}{100}=$25 g

(2)　密度$=\frac{物質の質量\ g}{物質の体積\ cm^3}$から、物質の体積$=\frac{物質の質量}{密度}$を使って求めます。求める体積は$\frac{100}{0.91}=109.9\ cm^3=$109.9 mL

(3)　(2)から、109.9 mL中に25 gのアンモニアがあるので、1000 mL中には、$25\times\frac{100}{109.9}=$227.5 g

(4)　アンモニア227.5 gをmol換算すると、$\frac{227.5}{17.03}=13.4$ mol、したがって、モル濃度は13.4 mol/L

問1-13

(1)　ムコダインシロップは1 mL中に、50 mgの原薬が含まれています。300 mgが必要なので、1回分の服用量は、$\frac{300}{50}$＝6 mLとなります。

(2)　カルボシステインシロップ5％は、1 mL中に、50 mgの原薬が含まれています。120 mgが必要なので、1回分の服用量は、$\frac{120}{50}$＝2.4 mLとなります。

問1-14

元素の原子量について、小数点以下の桁数はH、C、Oが4桁、Pbが1桁です。

式量は、各元素の原子量を足し合わせて算出しますから、最も位取りの高いPbが有効数字の桁数となります。したがって、答えは4桁です。

問1-15

0ではない数字から前に0がある場合、その0は桁数として数えません。したがって、「0.0120」の有効桁数は3桁となります。

問1-16

バルプロ酸ナトリウム顆粒20％が原薬量として1日400 mg処方されていることから、秤取すべき1日分の製剤量は、

$$400 \div 0.2 = 400 \div \frac{2}{10} = 400 \times \frac{10}{2} = 2000\ \text{mg/日} = 2\ \text{g/日}$$

14日分ですから、

秤取すべき20％顆粒の製剤量＝2 g/日×14日＝28 g

したがって、秤取すべき20％顆粒の製剤量は、28 gとなります。

第2章

問2-1

(1)　$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ から、$5\sqrt[6]{a^3} = 5a^{\frac{3}{6}} = 5a^{\frac{1}{2}}$　　(2)　$\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{a^{\frac{2}{3}}} = a^{-\frac{2}{3}}$

(3)　$x^{\frac{4}{7}} = \sqrt[7]{x^4}$　　(4)　$x^{-0.5} = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

問2-2

(1)　$58500 = 5.85 \times 10^4$　　(2)　$\frac{5}{40000} = \frac{5}{4 \times 10^4} = \frac{5}{4} \times 10^{-4} = 1.25 \times 10^{-4}$

(3)　$0.0043 = 4.3 \times 10^{-3}$

(4)　$0.1 \times 0.01 \times 0.001 \times 0.0001 = 10^{-1} \times 10^{-2} \times 10^{-3} \times 10^{-4} = 10^{-1-2-3-4} = 10^{-10} = 1 \times 10^{-10}$

問2-3

指数を注意、割り算を掛け算

(1)　$3^{\frac{1}{2}}\times 3^{\frac{1}{3}}\div 3^{\frac{2}{3}}=3^{\frac{1}{2}}\times 3^{\frac{1}{3}}\times 3^{-\frac{2}{3}}=3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}}=3^{\frac{3}{6}+\frac{2}{6}-\frac{4}{6}}=3^{\frac{1}{6}}$

指数を注意、割り算を掛け算

(2)　$9^{1.5}\times 36^{-0.5}\div 12^2\times 2^4=9^{1.5}\times 36^{-0.5}\times 12^{-2}\times 2^4$

$=(3^2)^{1.5}\times(2^2\times 3^2)^{-0.5}\times(2^2\times 3)^{-2}\times 2^4$

$=3^{2\times 1.5}\times 2^{2\times(-0.5)}\times 3^{2\times(-0.5)}\times 2^{2\times(-2)}\times 3^{-2}\times 2^4$

$=3^3\times 2^{-1}\times 3^{-1}\times 2^{-4}\times 3^{-2}\times 2^4=2^{-1-4+4}\times 3^{3-1-2}$

$=2^{-1}\times 3^0=\frac{1}{2}$

指数を注意、割り算を掛け算

(3)　$6^{1.2}\times 2^{0.6}\div\left(2^{0.5}\times 3^{\frac{3}{2}}\right)=(2\times 3)^{1.2}\times 2^{0.6}\times(2^{0.5}\times 3^{1.5})^{-1}$

$=2^{1.2}\times 3^{1.2}\times 2^{0.6}\times 2^{0.5\times(-1)}\times 3^{1.5\times(-1)}$

$=2^{1.2}\times 3^{1.2}\times 2^{0.6}\times 2^{-0.5}\times 3^{-1.5}$

$=2^{1.2+0.6-0.5}\times 3^{1.2-1.5}=2^{1.3}\times 3^{-0.3}$

問2-4

(1)　$10^5\times 10^{-2}=10^{5-2}=10^3$

指数を注意、割り算を掛け算

(2)　$10^2\div 10^{-3}=10^2\times 10^{-(-3)}=10^2\times 10^3=10^{2+3}=10^5$

(3)　$0.1^3\times 0.1^{-5}=(10^{-1})^3\times(10^{-1})^{-5}=10^{-3}\times 10^5=10^{-3+5}=10^2$

(4)　$0.1^5\div 10^{-6}=(10^{-1})^5\times(10^{-6})^{-1}=10^{-5}\times 10^6=10^{-5+6}=10^1=10$

指数を注意、割り算を掛け算

問2-5

(1)　$\sqrt[3]{e}=e^{\frac{1}{3}}$

$(a^r)^s=a^{rs}$

(2)　$(e^{0.2})^3\times e^{0.5}=e^{0.2\times 3}\times e^{0.5}=e^{0.6}\times e^{0.5}=e^{0.6+0.5}=e^{1.1}$

指数を注意、割り算を掛け算

(3)　$(e^{0.2})^3\div e^{0.5}=e^{0.2\times 3}\times e^{-0.5}=e^{0.6}\times e^{-0.5}=e^{0.6-0.5}=e^{0.1}$

(4)　$\sqrt[3]{e^{0.693}}=e^{\frac{0.693}{3}}=e^{0.231}$

問2-6

(1)　$\sqrt{x}=0.2$　　両辺を2乗します　　$(\sqrt{x})^2=0.2^2$　　$x=0.04$　　$x=0.04$

(2)　$\sqrt[3]{x}=0.3$　　両辺を3乗します　　$(\sqrt[3]{x})^3=0.3^3$　　$x=0.027$　　$x=0.027$

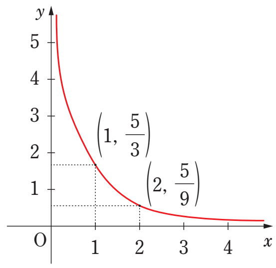
(3)　$x^{\frac{1}{3}}=0.9$　　両辺を3乗します　　$\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3=0.9^3$　$x=0.729$　　$x=0.729$

(4)　$\sqrt[3]{x^2}=2$　　両辺を3乗します　　$\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^3=2^3$　$x^2=8$　　$x=\pm\sqrt{8}=\pm 2\sqrt{2}$

問2-7

$y=5\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$　$(x\geqq 0)$　のグラフ

y切片は5で、$\left(1, \dfrac{5}{3}\right)$と$\left(2, \dfrac{5}{9}\right)$を通ります。

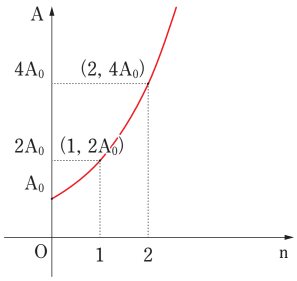


問2-8

最初のDNA量をA_0、サイクル数をn、増加したDNA量をAとすると、

$A=A_0\times 2^n$

となります。



問2-9

最初の放射線量をA_0、ある時間t（日）の残存している放射線量をAとします。半減期は14日から計算式は、$A=A_0\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{14}}$となります。ここで、75％減少したので、25％残存していることになります。すなわち、$A=0.25A_0=\dfrac{1}{4}A_0$となります。

これを式に代入して、$\dfrac{1}{4}A_0=A_0\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{14}}$となります。両辺を$A_0$で割り、

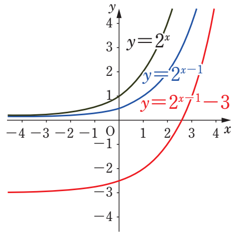
$$\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{14}}\qquad\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{14}}$$

となります。

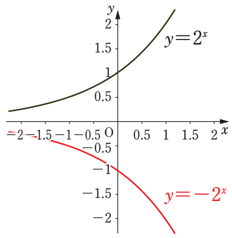
したがって、指数に注目すると、$2=\dfrac{t}{14}$となり、$t=28$（日）が求められます。

問2-10

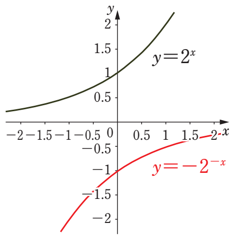
(1)　$y=2^{x-1}-3$は、$y-(-3)=2^{x-1}$から、$y=2^x$のグラフ（黒線）をx軸方向に1、y軸方向に-3だけ平行移動したグラフ（赤線）です。



(2)　$y=-2^x$ は、$-y=2^x$ から、$y=2^x$ のグラフ（黒線）を x 軸に関して対称移動したグラフ（赤線）です。

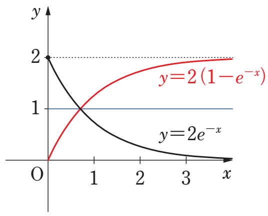


(3)　$y=-2^{-x}$ は、$-y=2^{-x}$ から、$y=2^x$ のグラフ（黒線）を原点に関して対称移動したグラフ（赤線）です。



問2–11

$y=2(1-e^{-x})$ のグラフは、$y=2-2e^{-x}$ から、$y-2=-2e^{-x}$ となります。$y=2e^{-x}$ のグラフ（黒線）を x 軸に関して対称移動し、y 軸方向に2平行移動したグラフ（赤線）になります。



問2–12

カルボシステインシロップ5%は、100 mL中に5 g（0.05 g/mL）の原薬が含まれていることになります。カルボシステインシロップは1回120 mg服用するので、比例式から、

$$100\ \text{mL}:5000\ \text{mg}=x\ \text{mL}:120\ \text{mg}\qquad \text{別解}\qquad 1\text{回量}=\frac{0.12\ \text{g/回}}{0.05\ \text{g/mL}}=2.4\ \text{mL/回}$$

$$5000x=12000$$

$$x=2.4$$

プロカテロール塩酸塩シロップ0.0005%は、100 mL中に、0.0005 g（=0.5 mg=500 μg、5 μg/mL）の原薬が含まれていることになります。プロカテロール塩酸塩シロップは、1回15 μg服用するので、比例式から、

$$100\ \text{mL}:500\ \mu\text{g}=x\ \text{mL}:15\ \mu\text{g}\qquad \text{別解}\qquad 1\text{回量}=\frac{15\ \mu\text{g/回}}{5\ \mu\text{g/mL}}=3\ \text{mL/回}$$

$$500x=1500$$

$$x=3$$

カルボシステインシロップ2.4 mLとプロカテロール塩酸塩シロップ3 mLを合わせるので、1回量は5.4 mLとなります。これに精製水を加えて整数値にするので、1回の服用量は6 mLとなります。

問2–13

70 vol%エタノールを3 L調製するためには、100 vol%エタノールが0.7×3000 mL=2100 mL必要です。また、クロルヘキシジングルコン酸塩を0.2 w/v%（0.2 g/100 mL=0.002 g/mL）含有する消毒薬を3 L調製するためには、クロルヘキシジングルコン酸塩が

0.002 g/mL×3000 mL＝6 g 必要です。95 vol％エタノール 100 mL 中にはエタノールが 95 mL 含まれています。

95 vol％エタノールの調製量を x mL、5 w/v％クロルヘキシジングルコン酸塩の調製量を y mL とすると、以下の比例式から必要量が求まります。

95 mL：100 mL＝2100 mL：x mL	5 g：100 mL＝6 g：y mL
$95x=210000$	$5y=600$
$x=2210.5$ mL	$y=120$ mL

したがって、95 vol％エタノールが 2210.5 mL と 5 w/v％クロルヘキシジングルコン酸塩が 120 mL 必要です。

第3章

問3-1

(1) $\frac{1}{125}=5^{-3}$　$\log_5 \frac{1}{125}=-3$

$\boxed{\text{指数}}$　$\boxed{\text{底}}$　$\boxed{\text{真数}}$

(2) $-4=\log_3 \frac{1}{81}$　$3^{-4}=\frac{1}{81}$

$\boxed{\text{指数}}$　$\boxed{\text{真数}}$　$\boxed{\text{底}}$

(3) $0=\log_{10} 1$　$10^0=1$

$\boxed{\text{指数}}$　$\boxed{\text{真数}}$　$\boxed{\text{底}}$

問3-2

(1) $\frac{1}{1000}=10^{-3}$ から、$\log_{10} \frac{1}{1000}=\log_{10} 10^{-3}=-3\log_{10} 10=-3$

$\boxed{\log_a M^r=r\log_a M}$　$\boxed{\log_a a=1}$

(2) $\frac{1}{36}=6^{-2}$ から、$\log_6 \frac{1}{36}=\log_6 6^{-2}=-2\log_6 6=-2$

$\boxed{\log_a M^r=r\log_a M}$　$\boxed{\log_a a=1}$

(3) $\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$ から、$\log_2 \sqrt{2}=\log_2 2^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_2 2=\frac{1}{2}$

$\boxed{\log_a a=1}$

問3-3

(1) $\log_2 x=0$ から、$x=2^0=1$

(2) $\log_{\frac{1}{3}} x=3$ から、$x=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$

(3) $\log_5 x=-2$ から、$x=5^{-2}=\frac{1}{5^2}=\frac{1}{25}$

問3-4

指数の底と対数の底が同じ場合、$a^{\log_a M}=M$ が成り立ちます。

(1)　$10^{\log_{10} 125}=125$（指数の底10、対数の底10）

(2)　指数の底が8、対数の底が2と異なるので、指数の底を2に揃えます。$8=2^3$ から、$8^{\log_2 7}=2^{3\cdot\log_2 7}=2^{\log_2 7^3}=7^3=343$

(3)　$4=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ から、$4^{\log_{\frac{1}{2}} 10}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2\log_{\frac{1}{2}} 10}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 10^{-2}}=10^{-2}=\frac{1}{10^2}=\frac{1}{100}=0.01$

問3-5

(1)　$\log_2 \frac{8}{3}+\log_2 6=\log_2\left(\frac{8}{3}\times 6\right)=\log_2 16=\log_2 2^4=4\log_2 2=4$

(2)　$\log_3 6+\log_3 15-\log_3 10=\log_3\left(\frac{6\times 15}{10}\right)=\log_3 9=\log_3 3^2=2\log_3 3=2$

(3)　$2\log_2 6+\log_2 10-\log_2 90=\log_2 6^2+\log_2 10-\log_2 90=\log_2 36+\log_2 10-\log_2 90$

$$=\log_2\left(\frac{36\times 10}{90}\right)=\log_2 4=\log_2 2^2=2\log_2 2=2$$

問3-6

対数の性質 $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$、$\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$ と $\log_a M^r=r\log_a M$ を利用して、求めます。

(1)　$\log\frac{9}{8}=\log 9-\log 8=\log 3^2-\log 2^3=2\log 3-3\log 2=2\times 0.4771-3\times 0.3010$

$$=0.9542-0.9030=0.0512$$

(2)　$\log 1.8=\log\frac{18}{10}=\log 18-\log 10=\log(2\times 3^2)-\log 10=\log 2+\log 3^2-\log 10$

$$=\log 2+2\log 3-\log 10=0.3010+2\times 0.4771-1=0.3010+0.9542-1=0.2552$$

(3)　$\log\sqrt{45}=\log 45^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log\frac{90}{2}=\frac{1}{2}(\log 90-\log 2)=\frac{1}{2}\{\log(9\times 10)-\log 2\}$

$$=\frac{1}{2}(\log 9+\log 10-\log 2)=\frac{1}{2}(\log 3^2+\log 10-\log 2)$$

$$=\frac{1}{2}(2\log 3+\log 10-\log 2)=\frac{1}{2}(2\times 0.4771+1-0.3010)$$

$$=\frac{1}{2}(0.9542+1-0.3010)=\frac{1}{2}\times 1.6532=0.8266$$

問3-7

対数の定義 $a^p=M \Leftrightarrow p=\log_a M$ から、

$\log 2=0.30 \rightarrow 10^{0.30}=2$、$\log 3=0.48 \rightarrow 10^{0.48}=3$

(1)　$10^{-8.22}=10^{0.30+0.48-9}=10^{0.30}\times 10^{0.48}\times 10^{-9}=2\times 3\times 10^{-9}=6\times 10^{-9}$

(2)　$10^{0.7}=10^{1-0.30}=10^1\times 10^{-0.30}=10^1\div 10^{0.30}=10\div 2=5$

(3)　$(\sqrt{10})^{2.52}=\sqrt{10^{2.52}}=10^{\frac{2.52}{2}}=10^{1.26}=10^{0.3+0.48\times2}=10^{0.3}+(10^{0.48})^2=2\times3^2=18$

問3-8

(1)　$2\log 3+\log 15-\log 13.5=\log 3^2+\log 15-\log 13.5=\log 9+\log 15-\log 13.5$

$$=\log\frac{9\times15}{13.5}=\log\frac{135}{13.5}=\log 10=1$$

(2)　$2\log 2+2\log 25-\log\frac{5}{2}=2\log 2+2\log 5^2-\log\frac{5}{2}=2\log 2+2\times2\log 5-\log\frac{5}{2}$

$$=2\log 2+4\log 5-(\log 5-\log 2)$$
$$=2\log 2+4\log 5-\log 5+\log 2=3\log 2+3\log 5$$
$$=3(\log 2+\log 5)=3\log 10=3$$

(3)　$\log\frac{1}{4}+\log\frac{1}{50}-\log\frac{1}{2}=\log\frac{1}{4}+\log\frac{1}{50}-\log 2^{-1}=\log\frac{1}{4}+\log\frac{1}{50}-(-\log 2)$

$$=\log\frac{1}{4}+\log\frac{1}{50}+\log 2=\log\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{50}\times2\right)=\log\frac{1}{100}$$
$$=\log 10^{-2}=-2\log 10=-2$$

問3-9

$\ln X=2.303\log X$から

(1)　$\ln 10=2.303\log 10=2.303$

(2)　$\ln\sqrt{10}=2.303\log\sqrt{10}=2.303\log 10^{\frac{1}{2}}=2.303\times\frac{1}{2}\log 10=\frac{2.303}{2}=1.1515$

(3)　$\frac{\ln 8}{\ln 9}=\frac{2.303\log 8}{2.303\log 9}=\frac{\log 2^3}{\log 3^2}=\frac{3\log 2}{2\log 3}=\frac{3\times0.3010}{2\times0.4771}=\frac{0.9030}{0.9542}=0.9463$

問3-10

(1)　$e^{\frac{3}{2}\ln 25}=e^{\frac{3}{2}\ln 5^2}=e^{\ln(5^2)^{\frac{3}{2}}}=e^{\ln 5^{2\times\frac{3}{2}}}=e^{\ln 5^3}=e^{\ln 125}=125$

(2)　$e^{\ln 3-\ln 5}=e^{\ln\frac{3}{5}}=\frac{3}{5}$　　　(3)　$exp(\ln 5)=e^{\ln 5}=5$

問3-11

(1)　$\ln\frac{1}{e}+\ln\frac{1}{e^2}+\ln\frac{1}{e^3}=\ln e^{-1}+\ln e^{-2}+\ln e^{-3}=-\ln e-2\ln e-3\ln e=-1-2-3=-6$

別解　$\ln\frac{1}{e}+\ln\frac{1}{e^2}+\ln\frac{1}{e^3}=\ln\left(\frac{1}{e}\times\frac{1}{e^2}\times\frac{1}{e^3}\right)=\ln\frac{1}{e^6}=\ln e^{-6}=-6\ln e=-6$

(2)　$2\ln 6e-\frac{1}{2}\ln 16e-\frac{2}{3}\ln 27e=2(\ln 6+\ln e)-\frac{1}{2}(\ln 16+\ln e)-\frac{2}{3}(\ln 27+\ln e)$

$$=2\{\ln(2\times3)+\ln e\}-\frac{1}{2}(\ln 2^4+\ln e)-\frac{2}{3}(\ln 3^3+\ln e)$$

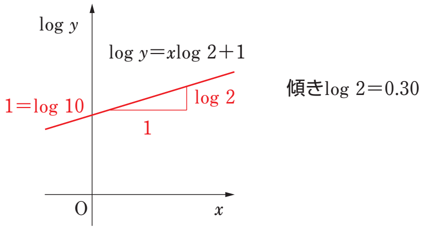
$$=2(\ln 2+\ln 3+\ln e)-\frac{1}{2}(4\ln 2+\ln e)-\frac{2}{3}(3\ln 3+\ln e)$$

$$=2\ln 2+2\ln 3+2-2\ln 2-\frac{1}{2}-2\ln 3-\frac{2}{3}=2-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}$$

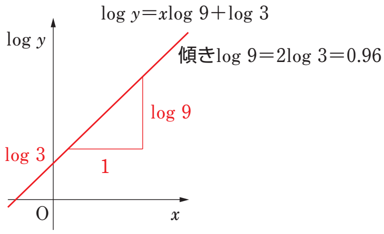
$$=\frac{12-3-4}{6}=\frac{5}{6}$$

問3-12

(1)　$y=10\cdot 2^x$ の両辺の対数をとると、$\log y=\log(10\times 2^x)=1+\log 2^x=x\log 2+1$ となり、傾きが $\log 2$、y 切片が 1 の直線となります。



(2)　$\log y=x\log 9+\log 3$ は、傾きが $\log 9$、y 切片が $\log 3$ の直線となります。



問3-13

水酸化ナトリウムは強塩基の化学物質なので、100％電離します。したがって、0.010 mol/L水酸化ナトリウム水溶液中における水酸化物イオンのモル濃度は0.010 mol/Lであると考えられます。すなわち、$[OH^-]=0.010$ mol/Lとなります。

$$\underset{0.010\ \mathrm{mol/L}}{\mathrm{NaOH}} \rightarrow \underset{0.010\ \mathrm{mol/L}}{\mathrm{Na^+}} + \underset{0.010\ \mathrm{mol/L}}{\mathrm{OH^-}}$$

水のイオン積 $Kw=[H^+][OH^-]=1.0\times 10^{-14}$ ですから、

$$[H^+]=\frac{1.0\times 10^{-14}}{[OH^-]}=\frac{1.0\times 10^{-14}(\mathrm{mol/L})^2}{0.010\ \mathrm{mol/L}}=1.0\times 10^{-12}\ \mathrm{mol/L}$$

したがって、0.010 mol/L水酸化ナトリウム水溶液のpHは、

$\mathrm{pH}=-\log[H^+]=-\log 1.0\times 10^{-12}=12$ となります。

別解

pOHは、$\mathrm{pOH}=-\log[OH^-]$ から、

$\mathrm{pOH}=-\log 0.010=-\log 10^{-2}=2$

となります。$\mathrm{pH}+\mathrm{pOH}=14$ から、$\mathrm{pH}=14-\mathrm{pOH}$

したがって、$\mathrm{pH}=14-\mathrm{pOH}=14-2=12$ となります。

問3-14

溶液のpHにおける分子形とイオン形の存在比は、次のヘンダーソン・ハッセルバルヒの式から求めることができます。

$$\mathrm{pH}=\mathrm{p}K_a+\log\frac{[\text{イオン形}]}{[\text{分子形}]}$$

設問に「弱酸性薬物の水溶液のpHが、その薬物のpK_aより2高い」とありますので、弱酸性薬物のpK_aをXとすると、水溶液のpHは$X+2$となります。

このXと$X+2$を上の式に代入すると、

$$X+2=X+\log\frac{[\text{イオン形}]}{[\text{分子形}]}$$

$$2=\log\frac{[\text{イオン形}]}{[\text{分子形}]}\qquad p=\log M \Leftrightarrow 10^p=M$$

$$\frac{[\text{イオン形}]}{[\text{分子形}]}=10^2=100$$

分子形：イオン形＝1：100

問3-15

この患者は併用薬の影響でテオフィリンの血中濃度が通常の2.67倍（40 μg/mL÷15 μg/mL≒2.67）近くまで増大し、中毒症状を起こしています。休薬することで、徐々にテオフィリンの血中濃度は低下するため、血中濃度が15 μg/mLに低下するまでの休薬時間を計算で求めます。

設問文に「線形1-コンパートメントモデルに従う」とありますので、テオフィリンの血中薬物濃度は、$\ln C=-kt+\ln C_0$で求めることができます。この式は、$t_{1/2}=\dfrac{\ln 2}{k}$から、

$$\ln C=-\frac{\ln 2}{t_{1/2}}\cdot t+\ln C_0$$

と変形できます。

設問に「受診時のテオフィリンの血中濃度が40 μg/mL」、「テオフィリンの血中濃度が15 μg/mLに低下するまでに要する時間」とありますから、上の式を利用して、テオフィリンの血中濃度が40 μg/mLから15 μg/mLに低下するまでの時間tを求めます。

設問から、半減期は6.9時間です。

$$\ln 15=-\frac{0.69}{6.9}\cdot t+\ln 40$$

$$0.1t=\ln 40-\ln 15=\ln\frac{40}{15}=\ln\frac{8}{3}=\ln\frac{2^3}{3}=\ln 2^3-\ln 3=3\ln 2-\ln 3$$

$$=3\times0.69-1.10=0.97$$

したがって、

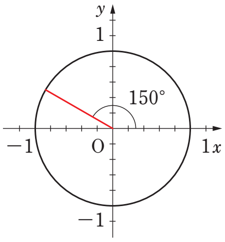
t＝9.7時間

すなわち、9.7時間休薬すると、40 μg/mLあったテオフィリンの血中濃度は、15 μg/mLにまで低下します。

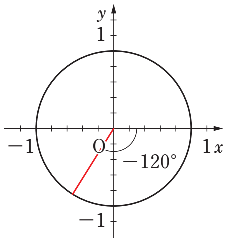
第4章

問4-1

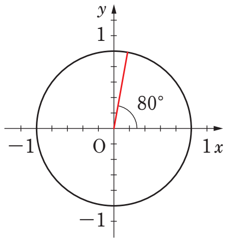
(1)　150°



(2)　$-480° = -360° - 120°$



(3)　$-640° = -360° \times 2 + 80°$



問4-2

$\pi = 180°$ から

(1)　$210° = 210 \times \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{7}{6}\pi$　　(2)　$\dfrac{4}{5}\pi = \dfrac{4}{5} \times 180° = 144°$　　(3)　$\dfrac{5}{4}\pi = \dfrac{5}{4} \times 180° = 225°$

問4-3

θ の動径が第3象限にありますので、$\sin\theta < 0$、$\cos\theta < 0$ となります。

$1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ から、$\tan\theta = 2$ を式に代入し、

$$1 + 2^2 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

変形して、$\cos^2\theta = \dfrac{1}{5}$、$\theta$ の動径が第3象限にありますので、$\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ となります。

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ から、$\sin\theta = \tan\theta \times \cos\theta = 2 \times \left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

問4-4

(1)　$\sin\dfrac{5\pi}{2} = \sin\left(2\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) = \sin\dfrac{\pi}{2} = 1$　　(2)　$\cos\dfrac{7\pi}{3} = \cos\left(2\pi + \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$

(3)　$\tan\dfrac{4\pi}{3} = \tan\left(\pi + \dfrac{\pi}{3}\right) = \tan\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

問4-5

(1)　$\dfrac{11\pi}{4} = 2\pi + \dfrac{3\pi}{4}$ から、$\sin\dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　$\cos\dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　$\tan\dfrac{3\pi}{4} = -1$

(2)　$-\dfrac{8\pi}{3} = -2\pi - \dfrac{2\pi}{3}$ から、$\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\sin\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

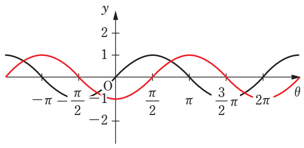
$\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) = \cos\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$　　$\tan\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\tan\dfrac{2\pi}{3} = -(-\sqrt{3}) = \sqrt{3}$

(3) $\sin\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)=-\sin\dfrac{5\pi}{6}=-\dfrac{1}{2}$ $\cos\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)=\cos\dfrac{5\pi}{6}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)=-\tan\dfrac{5\pi}{6}=-\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

問4-6

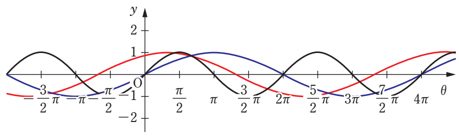
(1) $y=\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)$



$y=\sin\theta$ のグラフ（黒線）を θ 軸方向に $\dfrac{\pi}{2}$ だけ平行移動したグラフ（赤線）

周期は 2π

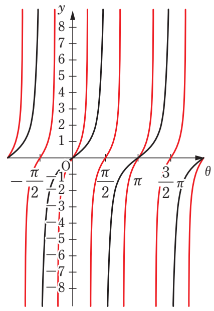
(2) $y=\sin\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\dfrac{1}{2}\left(\theta+\dfrac{2\pi}{3}\right)$



$y=\sin\theta$ のグラフ（黒線）を θ 軸方向に2倍したグラフ（青線）を θ 軸方向に $-\dfrac{2\pi}{3}$ だけ平行移動したグラフ（赤線）

周期は 4π

(3) $y=\tan 2\theta$



$y=\tan\theta$ のグラフ（黒線）を θ 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ 倍したグラフ（赤線）

周期は $\dfrac{\pi}{2}$

問4-7

(1) $\sin 15°=\sin(45°-30°)=\sin 45°\cos 30°-\cos 45°\sin 30°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(2) $\cos 15°=\cos(45°-30°)=\cos 45°\cos 30°+\sin 45°\sin 30°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

(3) $\tan 15°=\tan(45°-30°)=\dfrac{\tan 45°-\tan 30°}{1+\tan 45°\tan 30°}=\dfrac{1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}}{\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

分母を有理化するために、
分母・分子に $\sqrt{3}-1$ をかけます

$=\dfrac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\dfrac{3-2\sqrt{3}+1}{3-1}=\dfrac{4-2\sqrt{3}}{2}$

$=2-\sqrt{3}$ （45°, 60° の組み合わせでも解けます）

問4-8

(1)　$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ から、$\cos^2\alpha=1-\left(\dfrac{5}{13}\right)^2=1-\dfrac{25}{169}=\dfrac{144}{169}=\left(\dfrac{12}{13}\right)^2$

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ から、$0<\cos\alpha$　したがって $\cos\alpha=\dfrac{12}{13}$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\frac{5}{13}\times\frac{12}{13}=\frac{120}{169}$$

(2)　$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$ から、$\cos 2\alpha=1-2\times\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$

問4-9

(1)　半角の公式 $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{2}$ から、

割る数(2)の逆数 $\left(\dfrac{1}{2}\right)$ をかけます

$$\cos^2\frac{\pi}{8}=\cos^2\frac{\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{2+\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

$\cos\dfrac{\pi}{8}>0$ から、$\cos\dfrac{\pi}{8}=\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}}=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

(2)　半角の公式 $\tan^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$ から、

分母を有理化するために、
分母・分子に $\sqrt{2}-1$ をかけます

$$\tan^2\frac{\pi}{8}=\tan^2\frac{\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$$

$=\dfrac{(\sqrt{2}-1)^2}{2-1}$　$\tan\dfrac{\pi}{8}>0$ から、$\tan\dfrac{\pi}{8}=\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}=\sqrt{2}-1$

問4-10

(1)　積和の公式 $\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$ を使って

$$\cos 75^\circ\cos 45^\circ=\frac{1}{2}\{\cos(75^\circ+45^\circ)+\cos(75^\circ-45^\circ)\}$$

$$=\frac{1}{2}(\cos 120^\circ+\cos 30^\circ)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{4}$$

(2)　和積の公式 $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ を使って

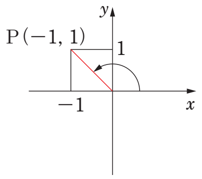
$$\cos 105^\circ-\cos 15^\circ=-2\sin\frac{105^\circ+15^\circ}{2}\sin\frac{105^\circ-15^\circ}{2}=-2\sin 60^\circ\sin 45^\circ$$

$$=-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{6}}{2}$$

問4-11

$-\sin\theta+\cos\theta$ を $a\sin\theta+b\cos\theta$ の式に当てはめると、$a=-1$、$b=1$ となります。

図にすると、



$r=\sqrt{(-1)^2+1^2}=2$ から、

$-\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{3\pi}{4}\right)$

第5章

問5-1

(1)　$a_n=a+(n-1)d$ に代入して $a_n=50+(n-1)(-3)=50-3n+3=-3n+53$

(2)　初項10、公差 $9.8-10=9.6-9.8=-0.2$ を式に代入。

$a_n=10+(n-1)(-0.2)=10-0.2n+0.2=-0.2n+10.2$

(3)　$a_3=a+(3-1)d=a+2d=-4$、$a_{10}=a+(10-1)d=a+9d=-46$

$a_{10}-a_3$ から、$(a+9d)-(a+2d)=-46-(-4)$、したがって、$7d=-42$

したがって、$d=-6$

d を a_3 に代入すると、$a+2\cdot(-6)=-4$ から、$a=8$

したがって、$a_n=8+(n-1)(-6)=8-6n+6=-6n+14$

問5-2

(1)　$a_{10}=50+(10-1)(-3)=50-27=23$

$S_n=\dfrac{n(a+l)}{2}$　l：末項から、$S_{10}=\dfrac{10(50+23)}{2}=365$

(2)　$a=10$、公差 $9.8-10=9.6-9.8=-0.2$

$a_{10}=10+(10-1)(-0.2)=8.2$

$S_{10}=\dfrac{10(10+8.2)}{2}=91$

問5-3

(1)　初項98、公比 $9.8\div98=0.98\div9.8=0.1=\dfrac{1}{10}$、$a_n=98\times\left(\dfrac{1}{10}\right)^{n-1}$

(2)　初項1、公比 $\dfrac{1}{e}\div1=\dfrac{1}{e^2}\div\dfrac{1}{e}=\dfrac{1}{e}$、$a_n=1\times\left(\dfrac{1}{e}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{1}{e}\right)^{n-1}=e^{-(n-1)}=e^{-n+1}$

(3)　初項5、公比 $\dfrac{2}{3}$、$a_n=5\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$　（注意：$5\cdot\dfrac{2^{n-1}}{3}$ にはなりません。必ず（　）をつけてください）

問5-4

(1)　$S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$ を使って求めます。初項 $a=6$、公比 $r=4$

$S_n=\dfrac{6(4^n-1)}{4-1}=\dfrac{6(4^n-1)}{3}=2(4^n-1)$

(2)　初項$a=5$、公比$r=\dfrac{2}{3}$

$$S_n=\frac{5\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{5\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}}{\frac{1}{3}}=5\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}\times3=15\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$$

割る数$\left(\dfrac{1}{3}\right)$の逆数(3)をかけます

問5-5

(1)　初項から順に1, 2, 3, 4, 5となるので、第k項はkとなります。したがって、$\displaystyle\sum_{k=1}^{5}k$

(2)　3　−6　12　−24　48　−96　を書き直すと、

　　3　$3(-2)$　$3(-2)^2$　$3(-2)^3$　$3(-2)^4$　$3(-2)^5$

初項が3、公比−2の等比数列です。

第k項は$a_k=3\times(-2)^{k-1}$

$\sum$記号の性質(1)から、$\displaystyle\sum_{k=1}^{6}\{3\times(-2)^{k-1}\}=3\sum_{k=1}^{6}(-2)^{k-1}$

(3)　初項から順に$\dfrac{1}{1^2}$, $\dfrac{1}{2^2}$, $\dfrac{1}{3^2}$, $\dfrac{1}{4^2}$, $\dfrac{1}{5^2}$

第k項は$\dfrac{1}{k^2}$から、$\displaystyle\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{k^2}$

問5-6

(1)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{8}(2k+1)=\sum_{k=1}^{8}2k+\sum_{k=1}^{8}1=2\sum_{k=1}^{8}k+\sum_{k=1}^{8}1=2\times\frac{8(8+1)}{2}+8=80$

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2\cdot3^{k-1}=2\sum_{k=1}^{n}3^{k-1}=2\times\frac{(3^n-1)}{3-1}=3^n-1$

(3)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}5^{k-1}=\frac{5^{n-1}-1}{5-1}=\frac{5^{n-1}-1}{4}$

問5-7

(1)　公比rが$-\dfrac{1}{2}$で、$|r|<1$となり、0に収束します。

(2)　公比rが3で、$r>1$となり、正の無限大に発散します。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{4^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$と変形すると、$|r|<1$となり、0に収束します。

問5-8

(1)　公比rが$\dfrac{2}{3}$なので、$|r|<1$となり、級数は収束します。和$S=\dfrac{1}{1-\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{\frac{1}{3}}=1\times3=3$

割る数$\left(\dfrac{1}{3}\right)$の逆数(3)をかけます

(2)　公比rが$-\dfrac{1}{3}$なので、$|r|<1$となり、級数は収束します。和$S=\dfrac{1}{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)}=\dfrac{1}{\dfrac{4}{3}}=1\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{4}$

割る数$\left(\dfrac{4}{3}\right)$の逆数$\left(\dfrac{3}{4}\right)$をかけます

(3)　公比rが$\dfrac{3}{2}$なので、$|r|>1$となり、発散します。

問5–9

設問から、2回目投与直前の血中濃度は、$\dfrac{1}{2}C_0=14\ \mu g/mL$ですから、

$C_0=28\ \mu g/mL$です。

設問に「消失半減期ごとに繰り返し静脈内投与する」とありますので、

$$R=\frac{1}{1-e^{-k_e\tau}}=2$$

となります。したがって、

$$1-e^{-k_e\tau}=\frac{1}{2}$$

$$e^{-k_e\tau}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=0.5$$ となります。

これらを$C_{ss,\,min}=\dfrac{C_0}{1-e^{-k_e\cdot\tau}}\cdot e^{-k_e\tau}$に代入すると、

$$C_{ss,\,min}=\frac{28}{0.5}\cdot 0.5=28\ \mu g/mL$$

となります。消失半減期ごとに繰り返し投与すると、定常状態における最低血中濃度$C_{ss,\,min}$は、初濃度C_0と同じになります。

第6章

問6–1

(1)　$x=-1$のとき、$y=(-1)^2+2\cdot(-1)-3=-4$

$x=1$のとき、$y=1^2+2\cdot1-3=0$

したがって、$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{0-(-4)}{1-(-1)}=\dfrac{4}{2}=2$

(2)　$x=-1$のとき、$y=-4$

$x=-1+h$のとき、$y=(-1+h)^2+2\cdot(-1+h)-3=-4+h^2$

したがって、$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{-4+h^2-(-4)}{-1+h-(-1)}=\dfrac{h^2}{h}=h$

問6–2

(1)　$\lim\limits_{h\to0}(5-h-2h^2)=5-0-2\cdot0^2=5$

(2)　$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+x-6}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x+3)(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}(x+3)=2+3=5$

(3) $\displaystyle \lim_{h\to 0}\frac{-2h-3h^2+5h^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(-2-3h+5h^2)}{h}=\lim_{h\to 0}(-2-3h+5h^2)=-2-3\cdot 0+5\cdot 0^2$

$\displaystyle =-2$

問6–3

$$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-(3+h)^2+2(3+h)-(-3^2+2\cdot 3)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-9-6h-h^2+6+2h-(-9+6)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-4h-h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(-4-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(-4-h)=-4$$

問6–4

(1) $\displaystyle f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)^2+3(x+h)-1-(2x^2+3x-1)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2x^2+4hx+2h^2+3x+3h-1-2x^2-3x+1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(4x+2h+3)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(4x+2h+3)=4x+3$$

(2) $f'(x)=4x+3$ から、$x=-1,\,-2,\,-3$ を代入し、

$f'(-1)=4\cdot(-1)+3=-1$

$f'(-2)=4\cdot(-2)+3=-5$

$f'(-3)=4\cdot(-3)+3=-9$

問6–5

(1) $y'=(2x^3-x^2+4x+3)'=2\cdot 3x^{3-1}-2x^{2-1}+4\cdot 1+0=6x^2-2x+4$

(2) $y'=(-3x^2+2x^{-2})'=-3\cdot 2x^{2-1}+2\cdot(-2)x^{-2-1}=-6x-4x^{-3}$

(3) $\displaystyle y'=\left(x-\frac{1}{x}\right)'=(x-x^{-1})'=1-(-1)x^{-1-1}=1+x^{-2}=1+\frac{1}{x^2}$

(4) $\displaystyle y'=\left(\sqrt{x^3}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'=\left(x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)'=\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$

$$=\frac{3}{2}\sqrt{x}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

(5) $y'=((x^2+1)(2x-1))'=(x^2+1)'(2x-1)+(x^2+1)(2x-1)'=2x(2x-1)+(x^2+1)2$

$=4x^2-2x+2x^2+2=6x^2-2x+2$

(6) $\displaystyle y'=\left(\frac{3}{x^2+1}\right)'=3\left(\frac{1}{x^2+1}\right)'=3\cdot\left\{-\frac{2x}{(x^2+1)^2}\right\}=-\frac{6x}{(x^2+1)^2}$

(7) $\displaystyle y'=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'=\frac{(x-1)'(x+1)-(x-1)(x+1)'}{(x+1)^2}=\frac{1(x+1)-(x-1)1}{(x+1)^2}=\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}$

$$=\frac{2}{(x+1)^2}$$

問6-6

$y'=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

したがって、

$x<-3, x>1$ のとき、$y'>0$ で、y は増加

$-3<x<1$ のとき、$y'<0$ で、y は減少

となります。

y' は x の2次関数で、グラフは下に凸となります。
x 軸との共有点は、方程式 $y'=0$ を解いて、$x=-3, 1$
あとは、y' のグラフから y' の符号が導かれます。

問6-7

(1) $y'=\left(\dfrac{e^x}{x}\right)'=\dfrac{(e^x)'x-e^x(x)'}{x^2}=\dfrac{e^x x-e^x\cdot 1}{x^2}=\dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$

(2) $y'=(x^2\ln x)'=(x^2)'\ln x+x^2(\ln x)'=2x\ln x+x^2\cdot\dfrac{1}{x}=2x\ln x+x=x(2\ln x+1)$

(3) $y'=\left(\dfrac{\cos x}{x}\right)'=\dfrac{(\cos x)'x-\cos x\cdot(x)'}{x^2}=\dfrac{(-\sin x)x-\cos x\cdot 1}{x^2}=\dfrac{-x\sin x-\cos x}{x^2}$

$=-\dfrac{x\sin x+\cos x}{x^2}$

(4) $y'=(x\tan x)'=(x)'\tan x+x(\tan x)'=1\cdot\tan x+x\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}=\tan x+\dfrac{x}{\cos^2 x}$

問6-8

t を x として公式を用います。

(1) $h'=(4.9t^2)'=4.9\cdot 2t^{2-1}=9.8t$

(2) $y'=2e^t$

(3) $y'=-2\cos t$

問6-9

(1) $y'=((2x-1)^3)'=2\cdot 3(2x-1)^{3-1}=6(2x-1)^2$

(2) $y'=\left(\dfrac{1}{(x^2+1)^2}\right)'=\{(x^2+1)^{-2}\}'=-2(x^2+1)'(x^2+1)^{-2-1}=-2\cdot 2x(x^2+1)^{-3}$

$=-\dfrac{4x}{(x^2+1)^3}$

(3) $y'=(\sqrt{3x-2})'=\left((3x-2)^{\frac{1}{2}}\right)'=3\cdot\dfrac{1}{2}(3x-2)^{\frac{1}{2}-1}=\dfrac{3(3x-2)^{-\frac{1}{2}}}{2}=\dfrac{3}{2\sqrt{3x-2}}$

(4) $y'=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}\right)'=\left((x^2+4)^{-\frac{1}{2}}\right)'=-\dfrac{1}{2}(x^2+4)'(x^2+4)^{-\frac{1}{2}-1}=-\dfrac{1}{2}\cdot 2x(x^2+4)^{-\frac{3}{2}}$

$=-\dfrac{x}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$

(5) $y'=(\ln(x^2+3))'=\dfrac{(x^2+3)'}{x^2+3}=\dfrac{2x}{x^2+3}$

(6) $y'=(\cos(-x+\pi))'=-1\{-\sin(-x+\pi)\}=\sin(-x+\pi)$

(7)　$y'=(xe^{x+2})'=(x)'e^{x+2}+x(e^{x+2})'=1\cdot e^{x+2}+x\cdot 1e^{x+2}=(x+1)e^{x+2}$

問6-10

(1)　$C'=(100e^{-0.2t})'=100\cdot(-0.2)e^{-0.2t}=-20e^{-0.2t}$

(2)　$y'=(\ln(3t-1))'=\dfrac{3}{3t-1}$

(3)　$y'=(5\sin(2t+\pi))'=5\cdot 2\cos(2t+\pi)=10\cos(2t+\pi)$

問6-11

(1)　$f_x(x,y)=(x\sin y+y\cos x)'=(x\sin y)'+(y\cos x)'=1\cdot\sin y+y(-\sin x)$

$=\sin y-y\sin x$

$f_y(x,y)=(x\sin y+y\cos x)'=(x\sin y)'+(y\cos x)'=x\cos y+1\cdot\cos x=x\cos y+\cos x$

(2)　$f_x(x,y)=(e^{x^2+y^2})'=(x^2+y^2)'e^{x^2+y^2}=2xe^{x^2+y^2}$

$f_y(x,y)=(e^{x^2+y^2})'=(x^2+y^2)'e^{x^2+y^2}=2ye^{x^2+y^2}$

問6-12

(1)　$f_x(x,y)=(3x+2y)'=(3x)'+(2y)'=3\cdot 1+0=3$

$f_y(x,y)=(3x+2y)'=(3x)'+(2y)'=0+2\cdot 1=2$

したがって、求める全微分は、

$dz=3dx+2dy$

(2)　$f_s(s,t)=(\sin s\cos t)'=\cos s\cos t$

$f_t(s,t)=(\sin s\cos t)'=\sin s(-\sin t)=-\sin s\sin t$

したがって、求める全微分は、

$dz=\cos s\cos t\,ds-\sin s\sin t\,dt$

問6-13

$f(x,y)=\sqrt{xy}$ と置きます。

(1)　偏微分 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ を求めると、

$$f_x(x,y)=(\sqrt{xy})'=\left(x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}y^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}$$

$$f_y(x,y)=(\sqrt{xy})'=\left(x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}$$

したがって、求める全微分は、

$$dz=\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}dx+\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}dy$$

(2)　$x=2$、$y=2$、$dx=0.03$、$dy=-0.02$ と置くと、

$$f(2.03,1.98)=\sqrt{2\cdot 2}+\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\cdot 0.03+\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}(-0.02)=2+0.015-0.01=2.005$$

実際の値は、$\sqrt{2.03\cdot 1.98}=2.004844\cdots$

第7章

問7–1

Cは積分定数とします。

(1) $\displaystyle\int(-2x^3+3x-7)\,dx=-2\cdot\frac{1}{4}x^4+3\cdot\frac{1}{2}x^2-7x+C=-\frac{1}{2}x^4+\frac{3}{2}x^2-7x+C$

(2) $\displaystyle\int(2\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x^2})\,dx=\int\left(2x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{2}{3}}\right)dx=2\cdot\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+C=\frac{4}{5}\sqrt{x^5}-\frac{5}{3}\sqrt[3]{x^5}+C$

(3) $\displaystyle\int\left(\frac{3}{x^2}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\int\left(3x^{-2}-x^{-\frac{1}{2}}\right)dx=3\cdot\frac{1}{-1}x^{-1}-\frac{2}{1}x^{\frac{1}{2}}+C=-\frac{3}{x}-2\sqrt{x}+C$

(4) $\displaystyle\int(10^x-2e^x)\,dx=\frac{10^x}{\ln 10}-2e^x+C$

(5) $\displaystyle\int(3\sin x-4\cos x)\,dx=3(-\cos x)-4\sin x+C=-3\cos x-4\sin x+C$

(6) $\displaystyle\int\left(1-\frac{1}{\cos x}\right)\left(1+\frac{1}{\cos x}\right)dx=\int\left(1-\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx=x-\tan x+C$

問7–2

Cは積分定数とします。

(1) $\displaystyle\int(4x-3)^2dx=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}(4x-3)^3+C=\frac{1}{12}(4x-3)^3+C$

(2) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{2x+3}}dx=\int(2x+3)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1}(2x+3)^{\frac{1}{2}}+C=\sqrt{2x+3}+C$

(3) $\displaystyle\int e^{3x-2}dx=\frac{1}{3}e^{3x-2}+C$

(4) $\displaystyle\int\frac{dx}{-1x+2}=\frac{1}{-1}\ln|-x+2|+C=-\ln|-x+2|+C$

(5) $\displaystyle\int\sin(2x-5)\,dx=\frac{1}{2}\{-\cos(2x-5)\}+C=-\frac{1}{2}\cos(2x-5)+C$

(6) $\displaystyle\int\cos(3x-4)\,dx=\frac{1}{3}\sin(3x-4)+C$

(7) $\displaystyle\int\frac{2}{\cos^2(2x+5)}dx=2\cdot\frac{1}{2}\tan(2x+5)+C=\tan(2x+5)+C$

問7–3

Cは積分定数とします。

(1) $\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$において、$t=\sqrt{x+1}$と置くと、$t^2=x+1$

したがって、$x=t^2-1$

$1dx=2tdt$

したがって、

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx=\int \frac{t^2-1}{t}\,2t\,dt=\int (2t^2-2)\,dt=2\cdot\frac{1}{3}t^3-2t+C=\frac{2}{3}t\,(t^2-3)+C$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{x+1}\,(x+1-3)+C=\frac{2}{3}\sqrt{x+1}\,(x-2)+C$$

(2) $\displaystyle\int \cos x\,(1-\sin^2 x)\,dx$ において、$t=\sin x$ と置くと、$1dt=\cos x\,dx$

したがって、

$$\int \cos x\,(1-\sin^2 x)\,dx=\int (1-t^2)\,dt=t-\frac{1}{3}t^3+C=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C$$

問7-4

C は積分定数とします。

(1) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2}\,dx=\int (2x-1)\,\overset{\text{微分}}{(x^2-x+1)}{}^{-2}\,dx=\frac{1}{-1}(x^2-x+1)^{-1}+C$

$$=-\frac{1}{x^2-x+1}+C$$

(2) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx=\int \frac{1}{3}\cdot 3x^2\,\overset{\text{微分}}{(x^3+1)}{}^{\frac{1}{2}}\,dx=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}(x^3+1)^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{9}\sqrt{(x^3+1)^3}+C$

(3) $\displaystyle\int (x-1)\,e^{x^2-2x-1}\,dx=\int \frac{1}{2}(2x-2)\,e^{\overset{\text{微分}}{x^2-2x-1}}\,dx=\frac{1}{2}e^{x^2-2x-1}+C$

(4) $\displaystyle\int \frac{4x}{x^2+3}\,dx=\int \frac{2\cdot 2x}{\underset{\text{微分}}{x^2+3}}\,dx=2\ln(x^2+3)+C$

(5) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\underset{\text{微分}}{e^x+1}}\,dx=\ln(e^x+1)+C$

(6) $\displaystyle\int (2x+1)\cos\overset{\text{微分}}{(x^2+x+2)}\,dx=\sin(x^2+x+2)+C$

問7-5

(1) $\displaystyle\int \overset{\text{そのまま}}{x}\,\underset{\text{積分}}{\sin x}\,dx=x\,(-\cos x)-\int \overset{\text{微分}}{1}\cdot\underset{\text{そのまま}}{(-\cos x)}\,dx=-x\cos x+\sin x+C$

(2) $\displaystyle\int \underset{\text{積分}}{x}\,\overset{\text{そのまま}}{\ln x}\,dx=\frac{1}{2}x^2\ln x-\int \underset{\text{そのまま}}{\frac{1}{2}x^2}\cdot\overset{\text{微分}}{\frac{1}{x}}\,dx=\frac{1}{2}x^2\ln x-\int \frac{1}{2}x\,dx=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2+C$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$$

問7-6

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{-1}(-3x^2+4x+2)\,dx=\left[-x^3+2x^2+2x\right]_{-2}^{-1}=-\left[x^3\right]_{-2}^{-1}+2\left[x^2\right]_{-2}^{-1}+2\left[x\right]_{-2}^{-1}$

$$=-\{(-1)^3-(-2)^3\}+2\{(-1)^2-(-2)^2\}+2\{-1-(-2)\}$$

$$=-(-1+8)+2(1-4)+2(-1+2)=-7-6+2=-11$$

(2) $\displaystyle\int_1^8\left(2\sqrt[3]{x}-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)dx=\int_1^8\left(2x^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right)dx=\left[2\cdot\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{1}x^{\frac{1}{3}}\right]_1^8$

$$=\frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{x^4}\right]_1^8-\left[\sqrt[3]{x}\right]_1^8=\frac{3}{2}(\sqrt[3]{8^4}-\sqrt[3]{1^4})-(\sqrt[3]{8}-\sqrt[3]{1})$$

$$=\frac{3}{2}(16-1)-(2-1)=\frac{45}{2}-1=\frac{43}{2}$$

(3) $\displaystyle\int_1^e\frac{x-1}{x}\,dx=\int_1^e\left(1-\frac{1}{x}\right)dx=\left[x\right]_1^e-\left[\ln|x|\right]_1^e=e-1-(\ln e-\ln 1)=e-1-1=e-2$

(4) $\displaystyle\int_{-1}^0 2^x\ln 2\,dx=\left[\frac{2^x\ln 2}{\ln 2}\right]_{-1}^0=\left[2^x\right]_{-1}^0=2^0-2^{-1}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

(5) $\displaystyle\int_0^{\pi}(3\sin x+4\cos x)\,dx=-3\left[\cos x\right]_0^{\pi}+4\left[\sin x\right]_0^{\pi}$

$$=-3(\cos\pi-\cos 0)+4(\sin\pi-\sin 0)$$

$$=-3(-1-1)+4(0-0)=6$$

(6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{\cos^2 x}\,dx=\left[\sqrt{2}\tan x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}\left(\tan\frac{\pi}{4}-\tan 0\right)=\sqrt{2}(1-0)=\sqrt{2}$

問7-7

(1) $\displaystyle\int_0^3\frac{1}{(3x+1)^2}\,dx=\int_0^3(3x+1)^{-2}\,dx=\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{-1}(3x+1)^{-1}\right]_0^3=\left[-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3x+1}\right]_0^3$

$$=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{1}\right)=\frac{3}{10}$$

(2) $\displaystyle\int_1^3\sqrt[3]{13x-12}\,dx=\int_1^3(13x-12)^{\frac{1}{3}}\,dx=\left[\frac{1}{13}\cdot\frac{3}{4}(13x-12)^{\frac{4}{3}}\right]_1^3=\left[\frac{3}{52}\sqrt[3]{(13x-12)^4}\right]_1^3$

$$=\frac{3}{52}(\sqrt[3]{27^4}-\sqrt[3]{1^4})=\frac{3}{52}(81-1)=\frac{60}{13}$$

(3) $\displaystyle\int_0^2 e^{-2x}\,dx=\left[\frac{1}{-2}e^{-2x}\right]_0^2=-\frac{1}{2}(e^{-4}-e^0)=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^4}-1\right)=\frac{e^4-1}{2e^4}$

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2x+\pi)\,dx=\left[\frac{1}{2}\{-\cos(2x+\pi)\}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{2}(\cos 2\pi-\cos\pi)$

$$=-\frac{1}{2}\{1-(-1)\}=-1$$

(5) $\displaystyle\int_1^e\frac{(\ln x)^2}{x}\,dx=\left[\frac{1}{3}(\ln x)^3\right]_1^e=\frac{1}{3}\{(\ln e)^3-(\ln 1)^3\}=\frac{1}{3}(1-0)=\frac{1}{3}$

(6) $\displaystyle\int_2^5 \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx=[\ln|x^2-x+1|]_2^5=\ln|25-5+1|-\ln|4-2+1|=\ln 21-\ln 3=\ln\frac{21}{3}$

$=\ln 7$

問7-8

(1) $\displaystyle\int_1^5 x\sqrt{x-1}\,dx$ において、$t=\sqrt{x-1}$ と置くと、$x=t^2+1$ ……①

x	$1\to5$
t	$0\to2$

となります。①式から、$dx=2tdt$

したがって、

$$\int_1^5 x\sqrt{x-1}\,dx=\int_0^2 t(t^2+1)\,2tdt=\int_0^2(2t^4+2t^2)\,dt=\left[2\cdot\frac{1}{5}t^5+2\cdot\frac{1}{3}t^3\right]_0^2$$

$$=\frac{2}{5}[t^5]_0^2+\frac{2}{3}[t^3]_0^2=\frac{2}{5}(2^5-0^5)+\frac{2}{3}(2^3-0^3)=\frac{64}{5}+\frac{16}{3}=\frac{272}{15}$$

(2) $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ において、$x=\sin t$ と置くと、 ……①

x	$0\to1$
t	$0\to\frac{\pi}{2}$

となります。①式から、$dx=\cos t\,dt$

したがって、

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cos t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos t}\cos t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt=[t]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$$

問7-9

(1) $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx=[xe^x]_0^1-\int_0^1 1\cdot e^x\,dx=1\cdot e-0\cdot e^0-[e^x]_0^1=e-(e-e^0)=1$

(2) $\displaystyle\int_e^{e^2}1\cdot\ln x\,dx=[x\ln x]_e^{e^2}-\int_e^{e^2}x\cdot\frac{1}{x}dx=e^2\ln e^2-e\ln e-[x]_e^{e^2}=2e^2-e-(e^2-e)=e^2$

問7-10

(1) $f(x)=-x^3$ と置くと、$f(-x)=-(-x)^3=x^3=-f(x)$ から、奇関数

$g(x)=-3x^2$ と置くと、$g(-x)=-3(-x)^2=-3x^2=g(x)$ から、偶関数

したがって、

$$\int_{-2}^{2}(-x^3-3x^2)\,dx=\int_{-2}^{2}(-x^3)\,dx+\int_{-2}^{2}(-3x^2)\,dx=0+2\int_{0}^{2}(-3x^2)\,dx=2\left[-x^3\right]_0^2$$

$$=-2\,(2^3-0)=-16$$

(2) $f(x)=\cos x$ と置くと、$f(-x)=\cos(-x)=\cos x=f(x)$ より、偶関数

したがって、

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=2\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=2\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right)=2$$

問7-11

(1) $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx=\lim_{h\to 0}\int_h^1 x^{-\frac{2}{3}}\,dx=\lim_{h\to 0}\left[\frac{3}{1}x^{\frac{1}{3}}\right]_h^1=\lim_{h\to 0}\left[3\sqrt[3]{x}\right]_h^1=\lim_{h\to 0}3\left(\sqrt[3]{1}-\sqrt[3]{h}\right)$

$$=3\,(1-0)=3$$

(2) $\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-x}\,dx=\lim_{h\to\infty}\int_0^h e^{-x}\,dx=\lim_{h\to\infty}\left[\frac{1}{-1}e^{-x}\right]_0^h=\lim_{h\to\infty}\{-(e^{-h}-e^0)\}=\lim_{h\to\infty}\left(-\frac{1}{e^h}+1\right)$

$$=0+1=1$$

第8章

問8-1

(1) $\dfrac{dy}{dx}=-2x$ の両辺に dx をかけて積分すると、$\displaystyle\int dy=\int(-2x)\,dx$

$$y=-2\cdot\frac{1}{2}x^2+C$$

したがって、一般解は、$y=-x^2+C$（C は任意定数）

(2) $\dfrac{dy}{dx}=y$ の両辺を y で割り、dx をかけると、$\dfrac{1}{y}dy=dx$

両辺を積分して、$\displaystyle\int\frac{1}{y}dy=\int dx$

$$\ln|y|=x+C$$

したがって、$|y|=e^{x+C}=e^Ce^x$

$$y=\pm e^Ce^x$$

$\pm e^C$ を改めて C に置き直すと、

一般解は、$y=Ce^x$（C は任意定数）

(3) $\dfrac{dy}{dx}=-xy$ の両辺を y で割り、dx をかけると、$\dfrac{1}{y}dy=-xdx$

両辺を積分して、$\displaystyle\int\frac{1}{y}dy=\int(-x)\,dx$

$$\ln|y|=-\frac{1}{2}x^2+C$$

したがって、$|y|=e^{-\frac{1}{2}x^2+C}=e^Ce^{-\frac{1}{2}x^2}$

$$y=\pm e^Ce^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$\pm e^C$ を改めて C に置き直すと、

一般解は、$y=Ce^{-\frac{1}{2}x^2}$（C は任意定数）

(4)　$x\dfrac{dy}{dx}=y+1$ の両辺を $x(y+1)$ で割り、dx をかけると、$\dfrac{1}{y+1}dy=\dfrac{1}{x}dx$

両辺を積分して、$\displaystyle\int\frac{1}{y+1}dy=\int\frac{1}{x}dx$

$$\ln|y+1|=\ln|x|+C$$

ln を1つにまとめて $\ln|y+1|-\ln|x|=C$

$$\ln\frac{|y+1|}{|x|}=C$$

$$\left|\frac{y+1}{x}\right|=e^C$$

したがって、$\dfrac{y+1}{x}=\pm e^C$

$\pm e^C$ を改めて C に置き直すと、

一般解は、$y+1=Cx$、すなわち、$y=Cx-1$（C は任意定数）

初期条件 $x=2$ のとき、$y=1$ を代入して、$1=2C-1$

したがって、$C=1$

ゆえに、特殊解は、$y=x-1$

(5)　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$ の両辺に ydx をかけて、$ydy=-xdx$

両辺を積分して、$\displaystyle\int ydy=\int(-x)\,dx$

$$\frac{1}{2}y^2=-\frac{1}{2}x^2+C$$

$$x^2+y^2=2C$$

$2C$ を改めて C に置き直すと、

一般解は、$x^2+y^2=C$（C は0以上の任意定数）

初期条件 $x=3$ のとき、$y=4$ を代入して、$9+16=C$

したがって、特殊解は、$x^2+y^2=25$

問8-2

(1)　$xy'+1\cdot y=3x^2+1$ から、

$(xy)'=3x^2+1$　両辺を積分して、$\displaystyle xy=\int(3x^2+1)\,dx=x^3+x+C$

両辺を x で割ると、一般解は、$y=x^2+\dfrac{C}{x}+1$（C は任意定数）

また、一般解に初期条件 $x=2$ のとき、$y=6$ を代入すると、$6=4+\dfrac{C}{2}+1$

これから、$C=2$

特殊解は、$y=x^2+\dfrac{2}{x}+1$

(2)　$y'+y=e^x$

$F(x)=\displaystyle\int dx=x$と置くと、$e^{F(x)}=e^x$、$e^{-F(x)}=e^{-x}$

したがって、

$$y=e^{-x}\left\{\int e^x e^x\,dx+C\right\}=e^{-x}\left\{\int e^{2x}dx+C\right\}=\frac{1}{e^x}\left(\frac{1}{2}e^{2x}+C\right)=\frac{e^x}{2}+\frac{C}{e^x}$$

すなわち、一般解は、$y=\dfrac{e^x}{2}+\dfrac{C}{e^x}$

また、一般解に初期条件$x=0$のとき、$y=\dfrac{3}{2}$を代入すると、$\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{C}{1}$

これから、$C=1$

特殊解は、$y=\dfrac{e^x}{2}+\dfrac{1}{e^x}$

(3)　$y'+2xy=-x$

$F(x)=\displaystyle\int 2xdx=x^2$と置くと、$e^{F(x)}=e^{x^2}$、$e^{-F(x)}=e^{-x^2}$

$$y=e^{-x^2}\left\{\int e^{x^2}(-x)\,dx+C\right\}=e^{-x^2}\left\{\int\left(-\frac{1}{2}\cdot 2xe^{x^2}\right)dx+C\right\}=e^{-x^2}\left(-\frac{1}{2}e^{x^2}+C\right)$$

$$=-\frac{1}{2}+Ce^{-x^2}$$

すなわち、一般解は、$y=Ce^{-x^2}-\dfrac{1}{2}$

また、一般解に初期条件$x=1$のとき、$y=\dfrac{1}{2}$を代入すると、$\dfrac{1}{2}=Ce^{-1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{C}{e}-\dfrac{1}{2}$

これから、$C=e$

特殊解は、$y=ee^{-x^2}-\dfrac{1}{2}$、すなわち、$y=e^{-x^2+1}-\dfrac{1}{2}$

問8-3

グラフから、半減期以前では、A>B>Cの順に分解の反応速度は、速くなっています。一方、半減期以降では、C>B>Aの順に分解の反応速度は、速くなっています。また、Cはリニアな通常のグラフで、Cの濃度と時間の関係が直線になっています。

ですので、Aの分解は2次反応、Bの分解は1次反応、Cの分解は0次反応です。

0次反応の半減期は、$t_{1/2}=\dfrac{C_0}{2k}$から、濃度に正比例します。したがって、濃度が2倍の20 mg/mLになれば、半減期も2倍の8時間になります。

1次反応の半減期は、$t_{1/2}=\dfrac{\ln 2}{k}=\dfrac{0.693}{k}$から、初濃度に無関係で一定ですから、初濃度

が20 mg/mLになったときの半減期も同じ4時間です。

2次反応の半減期は、$t_{1/2}=\dfrac{1}{kC_0}$から、濃度と反比例の関係です。したがって、濃度が2倍の20 mg/mLになれば、半減期は1/2の2時間になります。

別解

それぞれの反応式から消失速度定数を算出したのち、初濃度を20 mg/mLにしたときの半減期を求めることもできます。その場合には、下記のようにして計算します。

0次反応の半減期は、$t_{1/2}=\dfrac{C_0}{2k}$から、

$$4=\frac{10}{2k} \qquad 2k=\frac{10}{4}=2.5 \qquad k=1.25$$

Cは0次式ですから、初濃度を20 mg/mLに変えたときの半減期は、

$$t_{1/2}=\frac{C_0}{2k}=\frac{20}{2\times1.25}=\frac{20}{2.5}=8\text{時間}$$

1次反応の半減期は初濃度に無関係で一定ですから、初濃度を変えても4時間です。

2次反応の半減期は、$t_{1/2}=\dfrac{1}{kC_0}$から、

$$4=\frac{1}{10k} \qquad 10k=\frac{1}{4}=0.25 \qquad k=0.025$$

Aは2次式ですから、初濃度を20 mg/mLに変えたときの半減期は、

$$t_{1/2}=\frac{1}{kC_0}=\frac{1}{0.025\times20}=\frac{1}{0.5}=2\text{時間}$$

問8-4

薬物Aは片対数グラフで、Aの濃度と時間の関係が直線になっていますから、1次反応だということがわかります。また、薬物Bは濃度と時間の関係が直線になっていますから、0次反応だということがわかります。薬物Aの半減期（Aの濃度が10 mg/mLから5 mg/mLになるまでの時間）はグラフから、3日と読み取れます。また、薬物Bの半減期（Bの濃度が10 mg/mLから5 mg/mLになるまでの時間）はグラフから、8日と読み取れます。ここから、薬物Bの消失速度定数kを求めます。$t_{1/2}=\dfrac{C_0}{2k}$から、

$$k=\frac{C_0}{2\cdot t_{1/2}}=\frac{10}{2\times8}=\frac{10}{16}=0.625$$

薬物Aは1次反応ですから、半減期は初濃度に無関係で一定です。ですから、常に半減期は3日です。

したがって、薬物Bの半減期が3日になる初濃度を求めればよいことになります。

したがって、

$$3=\frac{C_0}{2\times0.625}=\frac{C_0}{1.25} \qquad C_0=3\times1.25=3.75\ \text{mg/mL}$$

第9章

問9-1

(1)　$(2\vec{a}+5\vec{b})-2(\vec{a}+2\vec{b})=2\vec{a}+5\vec{b}-2\vec{a}-4\vec{b}=\vec{b}$

(2)　$3(2\vec{a}-2\vec{b}-3\vec{c})+5(-\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c})=6\vec{a}-6\vec{b}-9\vec{c}-5\vec{a}+5\vec{b}+10\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

問9-2

(1)　$\overrightarrow{OC}=2\vec{b}$　　(2)　$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}=2\vec{a}-2\vec{b}$　　(3)　$\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PR}=-\vec{a}+2\vec{b}$

問9-3

(1)　$\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OR}=-2\vec{a}+\vec{c}$　　(2)　$\overrightarrow{TS}=\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{BS}=\overrightarrow{RQ}+\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{RP}=\vec{a}-\vec{c}$

(3)　$\overrightarrow{QU}=\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{PU}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

問9-4

$\vec{a}$は、始点からx軸方向、y軸方向にそれぞれ-2、2進むと終点となるので、$\vec{a}=(-2, 2)$
また、大きさは、$|\vec{a}|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$\vec{b}$は、始点からx軸方向、y軸方向にそれぞれ3、4進むと終点となるので、$\vec{b}=(3, 4)$
また、大きさは、$|\vec{b}|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

$\vec{c}$は、始点からx軸方向、y軸方向にそれぞれ-3、-2進むと終点となるので、
$\vec{c}=(-3, -2)$
また、大きさは、$|\vec{c}|=\sqrt{(-3)^2+(-2)^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$

$\vec{d}$は、始点からx軸方向、y軸方向にそれぞれ3、0進むと終点となるので、$\vec{d}=(3, 0)$
また、大きさは、$|\vec{d}|=\sqrt{3^2+0^2}=\sqrt{9}=3$

問9-5

(1)　$\vec{a}+\vec{b}=(-2, -5)+(3, -1)=(-2+3, -5-1)=(1, -6)$

(2)　$\vec{a}-\vec{b}=(-2, -5)-(3, -1)=(-2-3, -5-(-1))=(-5, -4)$

(3)　$-5\vec{a}=(-5\cdot(-2), -5\cdot(-5))=(10, 25)$

(4)　$-2\vec{a}+4\vec{b}=-2(-2, -5)+4(3, -1)=(-2\cdot(-2), -2\cdot(-5))+(4\cdot 3, 4\cdot(-1))$
$=(4, 10)+(12, -4)=(4+12, 10-4)=(16, 6)$

(5)　$3(\vec{a}-2\vec{b})+4(-\vec{a}+3\vec{b})=3\vec{a}-6\vec{b}-4\vec{a}+12\vec{b}=-\vec{a}+6\vec{b}=-(-2, -5)+6(3, -1)$
$=(2, 5)+(6\cdot 3+6\cdot(-1))=(2+18, 5-6)=(20, -1)$

問9-6

(1)　$\overrightarrow{AB}=(2, 1)-(4, -2)=(2-4, 1-(-2))=(-2, 3)$
$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-2)^2+3^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$

(2)　$\overrightarrow{BC}=(-1, 3)-(2, 1)=(-1-2, 3-1)=(-3, 2)$
$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(-3)^2+2^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$

問9-7

$$s\vec{a}+t\vec{b}=s(1,3)+t(-1,2)=(s,3s)+(-t,2t)=(s-t,3s+2t)$$

これは$\vec{c}=(-1,7)$と等しい。

したがって、x成分、y成分がそれぞれ等しいので、次の連立方程式が成り立ちます。

$$\begin{cases} s-t=-1 \\ 3s+2t=7 \end{cases}$$

これを解いて、$s=1$、$t=2$が得られます。

したがって、$\vec{c}=1\vec{a}+2\vec{b}=\vec{a}+2\vec{b}$

問9-8

(1) $3\vec{a}-4\vec{b}=3(-1,4,3)-4(2,5,-3)=(3\cdot(-1),3\cdot4,3\cdot3)+(-4\cdot2,-4\cdot5,-4\cdot(-3))$

$=(-3,12,9)+(-8,-20,12)=(-3-8,12-20,9+12)=(-11,-8,21)$

(2) $-2(3\vec{a}-\vec{b})+2(\vec{a}-2\vec{b})=-6\vec{a}+2\vec{b}+2\vec{a}-4\vec{b}=-4\vec{a}-2\vec{b}=-4(-1,4,3)-2(2,5,-3)$

$=(-4\cdot(-1),-4\cdot4,-4\cdot3)+(-2\cdot2,-2\cdot5,-2\cdot(-3))$

$=(4,-16,-12)+(-4,-10,6)=(4-4,-16-10,-12+6)$

$=(0,-26,-6)$

問9-9

(1) $\overrightarrow{AB}=(-1,2,4)-(3,-1,-3)=(-1-3,2-(-1),4-(-3))=(-4,3,7)$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-4)^2+3^2+7^2}=\sqrt{16+9+49}=\sqrt{74}$

(2) $\overrightarrow{BC}=(2,-2,2)-(-1,2,4)=(2-(-1),-2-2,2-4)=(3,-4,-2)$

$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{3^2+(-4)^2+(-2)^2}=\sqrt{9+16+4}=\sqrt{29}$

(3) $\overrightarrow{CA}=(3,-1,-3)-(2,-2,2)=(3-2,-1-(-2),-3-2)=(1,1,-5)$

$|\overrightarrow{CA}|=\sqrt{1^2+1^2+(-5)^2}=\sqrt{1+1+25}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$

問9-10

$$\begin{aligned} r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}&=r(-1,2,1)+s(0,-3,2)+t(4,-2,-1) \\ &=(-r,2r,r)+(0,-3s,2s)+(4t,-2t,-t) \\ &=(-r+4t,2r-3s-2t,r+2s-t) \end{aligned}$$

これが$\vec{d}=(10,4,-5)$と等しい。

したがって、x成分、y成分、z成分がそれぞれ等しいので、次のr、s、tについての3元連立方程式が成り立ちます。

$$\begin{cases} -r+4t=10 & \cdots\cdots ① \\ 2r-3s-2t=4 & \cdots\cdots ② \\ r+2s-t=-5 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

②×2+③×3から、$7r-7t=-7$

したがって、$r-t=-1$ ……④

①、④式から、r、tについて解くと、$r=2$、$t=3$を得ます。

これを③式に代入し、$s=-2$

したがって、$\vec{d}=2\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}$

問9–11

(1)　$AC=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$、$\angle BAC=\dfrac{\pi}{4}$ から、

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\cdot2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}=4\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=4$$

(2)　$BD=2\sqrt{2}$、$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BD}$ のなす角は $\dfrac{3}{4}\pi$ から、

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=2\cdot2\sqrt{2}\cos\frac{3}{4}\pi=4\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-4$$

(3)　$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$ のなす角は $\dfrac{\pi}{2}$（直交しています）ですから、$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

(4)　$\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{CB}$ のなす角は π ですから、$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}=2\cdot2\cos\pi=4\cdot(-1)=-4$

問9–12

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot(-6)+3\cdot4=-12+12=0$

(2)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot2+(-3)\cdot(-1)+(-1)\cdot2=6+3-2=7$

問9–13

(1)　なす角を θ と置くと、

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-1\cdot\sqrt{3}+\sqrt{3}\cdot(-1)}{\sqrt{(-1)^2+\sqrt{3}^2}\sqrt{\sqrt{3}^2+(-1)^2}}=\frac{-2\sqrt{3}}{2\cdot2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

したがって、$\theta=\dfrac{5}{6}\pi$

(2)　なす角を θ と置くと、

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{1\cdot(-1)+(-1)\cdot2+0\cdot2}{\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}}=\frac{-1-2+0}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{9}}=\frac{-3}{3\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

したがって、$\theta=\dfrac{3}{4}\pi$

問9–14

(1)　3行で3列からなる行列なので3次の正方行列です。

(2)　(3, 2)成分は3行目で2列目の成分ですから、-3 です。

(3)　対応するすべての成分が等しいので、

(3, 1)成分から、$x=3$

(1, 3)成分から、$2y=-2$

したがって、$y=-1$

(3, 3)成分から、$3z-1=5$

したがって、$z=2$

問9–15

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 5 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 2 & -7 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+0 & -3+2 & 0-7 \\ -2+1 & 5+0 & 2-3 \\ 4-2 & 0+4 & -3+3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -7 \\ -1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 5 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 2 & -7 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-0 & -3-2 & 0-(-7) \\ -2-1 & 5-0 & 2-(-3) \\ 4-(-2) & 0-4 & -3-3 \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} 1 & -5 & 7 \\ -3 & 5 & 5 \\ 6 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

(3) $2\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 5 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot1 & 2\cdot(-3) & 2\cdot0 \\ 2\cdot(-2) & 2\cdot5 & 2\cdot2 \\ 2\cdot4 & 2\cdot0 & 2\cdot(-3) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -6 & 0 \\ -4 & 10 & 4 \\ 8 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

(4) $-2\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 5 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 0 & 2 & -7 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 4 & -10 & -4 \\ -8 & 0 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 6 & -21 \\ 3 & 0 & -9 \\ -6 & 12 & 9 \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} -2 & 12 & -21 \\ 7 & -10 & -13 \\ -14 & 12 & 15 \end{pmatrix}$$

問9–16

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot(-1)+(-2)\cdot1 \\ 1\cdot(-1)+3\cdot1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3\cdot4+2\cdot3 & -3\cdot(-2)+2\cdot1 \\ -1\cdot4+3\cdot3 & -1\cdot(-2)+3\cdot1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -12+6 & 6+2 \\ -4+9 & 2+3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & 8 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4-4+0 & 0+2-4 & 4-6+2 \\ 2+2+0 & 0-1+12 & 2+3-6 \\ -2-2+0 & 0+1+12 & -2-3-6 \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 4 & 11 & -1 \\ -4 & 13 & -11 \end{pmatrix}$$

問9–17

(1) $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$について、$\Delta=3\cdot(-2)-5\cdot(-1)=-6+5=-1\neq0$

したがって、逆行列は存在します。

逆行列は、$A^{-1}=\dfrac{1}{-1}\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$となります。

(2) $B=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$について、$\Delta=(-2)(-4)-3\cdot2=8-6=2\neq0$

したがって、逆行列は存在します。

逆行列は、$B^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-4 & -3\\ -2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -\dfrac{3}{2}\\ -1 & -1\end{pmatrix}$

(3)　$C=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -9 & 6\end{pmatrix}$について、$\Delta=3\cdot6-(-2)\cdot(-9)=18-18=0$

したがって、逆行列は存在しません。

問9-18

(1)　係数行列は、$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$

したがって、連立方程式を行列の積で表すと、$\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 8\end{pmatrix}$となります。

$$\Delta=1\cdot(-1)-(-2)\cdot3=-1+6=5\neq0$$

ゆえに、逆行列が存在して、

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\ 8\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 8\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1+16\\ -3+8\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}15\\ 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}$$

したがって、$x=3$、$y=1$

(2)　係数行列は$A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

したがって、連立方程式を行列の積で表すと、$\begin{pmatrix}3 & 4\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ -6\end{pmatrix}$となります。

$$\Delta=3\cdot2-4\cdot(-1)=6+4=10\neq0$$

したがって、逆行列が存在して、

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -1 & 2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-2\\ -6\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}2 & -4\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\ -6\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}-4+24\\ -2-18\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}20\\ -20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ -2\end{pmatrix}$$

ゆえに、$x=2$、$y=-2$

問9-19

(1)　$\begin{vmatrix}4 & -2\\ -5 & 3\end{vmatrix}=4\cdot3-(-2)\cdot(-5)=12-10=2$

(2)　$\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & -2\end{vmatrix}=1\cdot(-2)-(-2)\cdot1=-2+2=0$

(3)　$\begin{vmatrix}-4 & 2 & -1\\ 5 & -3 & 2\\ 6 & 4 & 1\end{vmatrix}$

$$=(-4)\cdot(-3)\cdot1+2\cdot2\cdot6+(-1)\cdot4\cdot5-(-1)\cdot(-3)\cdot6-2\cdot4\cdot(-4)-1\cdot5\cdot2$$
$$=12+24-20-18+32-10=20$$

(4) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

$$=0\cdot 2\cdot(-3)+3\cdot(-3)\cdot 1+(-2)\cdot 2\cdot 1-(-2)\cdot 2\cdot 1-(-3)\cdot 2\cdot 0-(-3)\cdot 1\cdot 3$$
$$=0-9-4+4-0+9=0$$

問9-20

(1) $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}=5\cdot 3-2\cdot(-2)=15+4=19\neq 0$

したがって、

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}}{19}=\frac{3\cdot 3-2\cdot(-5)}{19}=\frac{19}{19}=1$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -5 \end{vmatrix}}{19}=\frac{5\cdot(-5)-3\cdot(-2)}{19}=\frac{-25+6}{19}=\frac{-19}{19}=-1$$

したがって、$x=1$、$y=-1$

(2) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}=16+9-6-(-4)-(-12)-(-18)=53\neq 0$

したがって、

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 21 & 4 & 3 \\ -6 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{53}=\frac{32-54+42-24-(-24)-126}{53}=\frac{-106}{53}=-2$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -3 & 21 & 3 \\ 1 & -6 & 2 \end{vmatrix}}{53}=\frac{84+12-18-(-21)-(-36)-(-24)}{53}=\frac{159}{53}=3$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -3 & 4 & 21 \\ 1 & -2 & -6 \end{vmatrix}}{53}=\frac{-48+63+24-16-(-84)-54}{53}=\frac{53}{53}=1$$

ゆえに、$x=-2$、$y=3$、$z=1$

第10章

問10-1

(1) $7!=7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=5040$

(2) ${}_7P_4=7\cdot 6\cdot 5\cdot 4=840$

(3) $_5C_2=\dfrac{_5P_2}{2!}=\dfrac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$

(4) $_7C_4={}_7C_3=\dfrac{_7P_3}{3!}=\dfrac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=35$

問10-2

1回目、2回目の結果を、(1回目、2回目) と表すと、
$U=\{$(表, 表), (表, 裏), (裏, 表), (裏, 裏)$\}$ となります。

表と裏が1回ずつ出る事象をAとすると、$A=\{$(表, 裏), (裏, 表)$\}$となります。
したがって、場合の数は、$n(U)=4$、$n(A)=2$

したがって、求める確率は、$P(A)=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

問10-3

$U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$、$A=\{1, 3, 5\}$、$B=\{5, 6\}$、$C=\{1, 2\}$となります。

(1) $A\cap B=\{5\}$から、$P(A\cap B)=\dfrac{1}{6}$

(2) $A\cup B=\{1, 3, 5, 6\}$から、$P(A\cup B)=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

(3) B、Cは、互いに排反です。したがって、$P(B\cup C)=P(B)+P(C)=\dfrac{2}{6}+\dfrac{2}{6}=\dfrac{2}{3}$

問10-4

A工場の製品であることを事象A、不良品である事象をBとすると、

$$P(A)=\frac{3}{5}、P_A(B)=\frac{5}{100}=\frac{1}{20}$$

したがって、求める確率は、$P(A\cap B)=P(A)P_A(B)=\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{1}{20}=\dfrac{3}{100}=0.03$

問10-5

大量の製品から抜き出すので、1個ずつ抜き出す際の不良品の確率0.05は変わらないと考えて差し支えありません。

したがって、求める確率は反復試行の定理から、

$$_5C_2 0.05^2\cdot0.95^{5-2}=\frac{_5P_2}{2!}\cdot0.05^2\cdot0.95^3=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}\cdot0.0025\cdot0.857375=0.021434375$$
$$\fallingdotseq 0.021$$

問10-6

$$P(X=1)=P(X=2)=P(X=3)=P(X=4)=P(X=5)=P(X=6)=\frac{1}{6}$$

となります。したがって、確率分布表は次のようになります。

X	1	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

問10-7

確率分布表は、次のようになります。(問10-6参照)

X	1	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

したがって、

$$\mu=E(X)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}=3.5$$

$$\sigma^2=V(X)=\left(1-\frac{7}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\left(2-\frac{7}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\left(3-\frac{7}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\left(4-\frac{7}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{6}$$

$$+\left(5-\frac{7}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\left(6-\frac{7}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{6}$$

$$=\frac{25}{4}\cdot\frac{1}{6}+\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}+\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{6}+\frac{25}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{70}{24}=\frac{35}{12}\fallingdotseq 2.917$$

$$\sigma=\sqrt{2.917}\fallingdotseq 1.708$$

別解

$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2=1^2\cdot\frac{1}{6}+2^2\cdot\frac{1}{6}+3^2\cdot\frac{1}{6}+4^2\cdot\frac{1}{6}+5^2\cdot\frac{1}{6}+6^2\cdot\frac{1}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$=\frac{1+4+9+16+25+36}{6}-\frac{49}{4}=\frac{91}{6}-\frac{49}{4}=\frac{35}{12}\fallingdotseq 2.917$$

問10-8

(1) サイコロを1個投げたとき、1の目が出る確率は$\frac{1}{6}$で、各回の試行は独立です。したがって、確率変数Xは二項分布$B\left(720,\ \frac{1}{6}\right)$に従います。

(2) $\mu=720\cdot\frac{1}{6}=120$回　　$\sigma^2=720\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=100$　　$\sigma=\sqrt{100}=10$回

問10-9

(1) $P(22\leqq X\leqq 26.4)=P\left(\frac{22-22}{10}\leqq Z\leqq\frac{26.4-22}{10}\right)=P(0\leqq Z\leqq 0.44)=P(0.44)=0.17003$

(2) $P(10.4\leqq X\leqq 14.7)=P\left(\frac{10.4-22}{10}\leqq Z\leqq\frac{14.7-22}{10}\right)=P(-1.16\leqq Z\leqq -0.73)$

$$=P(1.16)-P(0.73)=0.37698-0.26730=0.10968$$

(3)　$P(X \leqq 29.8) = P\left(Z \leqq \dfrac{29.8-22}{10}\right) = P(Z \leqq 0.78) = 0.5 + P(0.78) = 0.5 + 0.28230 = 0.78230$

問10-10

体重をXと置くと、Xは正規分布$N(67.3, 11.1^2)$に従います。また、体重が45 kgから80 kgの人の割合は、$P(45 \leqq X \leqq 80)$となります。Xを標準化した確率変数をZとすると、

$$P(45 \leqq X \leqq 80) = P\left(\frac{45-67.3}{11.1} \leqq Z \leqq \frac{80-67.3}{11.1}\right) = P(-2.01 \leqq Z \leqq 1.14)$$

$$= 0.47778 + 0.37286 = 0.85064 \fallingdotseq 85.1\%$$

問10-11

体重をXと置くと、Xは正規分布$N(67.3, 11.1^2)$に従います。両側5％点は、$\mu \pm 1.96\sigma$で得られるので、両側5％点は、

$$67.3 \pm 1.96 \times 11.1 = 67.3 \pm 21.756 = 89.056\ \text{kg}、45.544\ \text{kg}$$

第11章

問11-1

		答
(1)	毛髪色（黒髪、栗毛、赤毛、金髪）	名義尺度
(2)	年間に発生した台風の数	比尺度
(3)	病気の有無	名義尺度
(4)	肥満度（やせ、標準、肥満、高度肥満）	順序尺度
(5)	来局患者数	比尺度

問11-2

(a)　小さい順（昇順）にデータを並べます。

14.1	14.8	14.9	15.0	15.1	15.1	15.3	15.4	15.5	15.6	15.7	15.8	15.8	15.9	16.0	16.1	16.2	16.3	16.3	16.7

(b)　階級数を決めます。

$$\text{階級数} = 1 + \frac{\log 20}{0.30103} = 1 + \frac{1.30103}{0.30103} = 1 + 4.3 = 5.3 \cong 6$$

(c)　階級の幅を決めます。

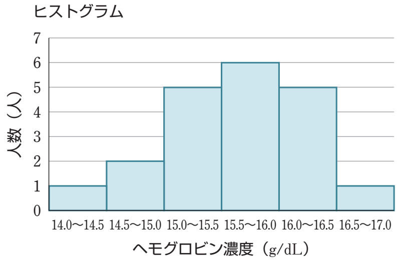
$$\frac{16.7-14.1}{6} = \frac{2.6}{6} = 0.43 \cong 0.5$$

階級数を6とした場合、階級幅を0.5とすると、切りのよい度数分布表がつくれるはずです。

(d)　度数分布表を作成します。

答：度数分布表

階級（g/dL）以上～未満	階級値（g/dL）	度数（人）
14.0～14.5	14.25	1
14.5～15.0	14.75	2
15.0～15.5	15.25	5
15.5～16.0	15.75	6
16.0～16.5	16.25	5
16.5～17.0	16.75	1



問11-3

$$\text{学生の血圧平均値}=\frac{118+129+130+132+110+121+124+126+117+136}{10}$$

$$=\frac{1243}{10}=124.3\ \text{mmHg}$$

小さい順（昇順）に血圧値を並び替えます。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
110	117	118	121	124	126	129	130	132	136

学生数が10と偶数ですから、中央値は5番目と6番目の平均値になります。

$$\text{中央値}=\frac{124+126}{2}=\frac{250}{2}=125\ \text{mmHg}$$

問11-4

(a)　計算表を作成します。

	x_i	$x_i-\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$
1	4.2	−0.18	0.0324
2	4.5	0.12	0.0144
3	4.4	0.02	0.0004
4	4.1	−0.28	0.0784
5	4.1	−0.28	0.0784
6	4.4	0.02	0.0004
7	4.5	0.12	0.0144
8	4.8	0.42	0.1764
9	4.3	−0.08	0.0064
10	4.5	0.12	0.0144
合計	43.8		0.4160
平均$\bar{x}$	4.38		

(b)　平均値を求めます。

$$平均値\ \bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}x_i=\frac{4.2+4.5+4.4+4.1+4.1+4.4+4.5+4.8+4.3+4.5}{10}$$

$$=\frac{43.8}{10}=4.38\ \mathrm{mg/dL}$$

(c) 次に、不偏分散と標準偏差を求めます。

$$不偏分散\ U^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2$$

$$=\frac{(4.2-4.38)^2+(4.5-4.38)^2+(4.4-4.38)^2+\cdots+(4.5-4.38)^2}{10-1}$$

$$=0.0462\,[\mathrm{mg/dL}]^2$$

$$標準偏差\ S=\sqrt{\sigma^2}=\sqrt{0.0462}=0.215\ \mathrm{mg/dL}$$

問11-5

42、46、53、57、64、67、72、76、83、85

10人ですので、中央値は、5番目の値と6番目の値の平均値になります。したがって、

$$中央値=\frac{64+67}{2}=\frac{131}{2}=65.5点\ (第2四分位数)$$

中央値を境界に上の組と下の組に分けると、

下半分は、42、46、53、57、64

下半分の中央値は、53点ですから、第1四分位数は53点です。

また、上半分は67、72、76、83、85

上半分の中央値は、76点ですから、第3四分位数は76点です。

問11-6

(a) 計算表を作成します。

	旧試薬 (X)	新試薬 (Y)	X^2	Y^2	XY
1	0.85	0.72	0.7225	0.5184	0.612
2	1.32	1.15	1.7424	1.3225	1.518
3	1.75	1.63	3.0625	2.6569	2.8525
4	2.2	2.04	4.84	4.1616	4.488
5	2.97	2.76	8.8209	7.6176	8.1972
6	3.3	3.01	10.89	9.0601	9.933
7	3.8	3.63	14.44	13.1769	13.794
8	4.15	3.85	17.2225	14.8225	15.9775
合計	20.34	18.79	61.7408	53.3365	57.3722
平均	2.5425	2.34875			

(b) 変数Xの平均値$\bar{x}$を求めます。

$$\bar{x}=\frac{0.85+1.32+1.75+2.2+2.97+3.3+3.8+4.15}{8}=\frac{20.34}{8}=2.5425$$

(c) 変数 Y の平均値 $\bar{y}$ を求めます。

$$\bar{y}=\frac{0.72+1.15+1.63+2.04+2.76+3.01+3.63+3.85}{8}=\frac{18.79}{8}=2.34875$$

(d) 変数 X の分散 $S_x{}^2$ を求めます。

$$S_x{}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2-\bar{x}^2=\frac{61.7408}{8}-2.5425^2=7.7176-6.46430625=1.25329375$$

(e) 共分散 S_{xy} を求めます。

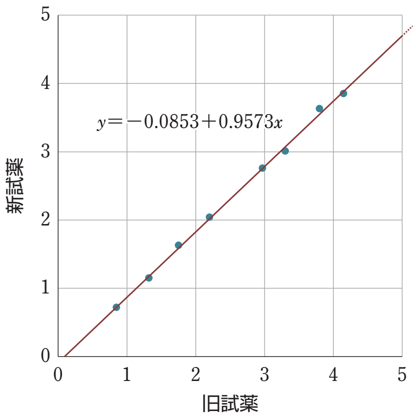
$$S_{xy}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\times y_i-\bar{x}\bar{y}=\frac{57.3722}{8}-2.5425\times 2.34875$$
$$=7.171525-5.971696875=1.199828125$$

(f) 傾き b と切片 a を求めます。

$$\text{傾き}\,b=\frac{S_{xy}}{S_x{}^2}=\frac{1.199828125}{1.25329375}=0.957339909$$

$$\text{切片}\,a=\bar{y}-b\bar{x}=2.34875-0.957339909\times 2.5425=2.34875-2.434036718$$
$$=-0.0853$$

したがって、回帰方程式は、$y=-0.0853+0.9573x$ となります。



問11-7

母比率の信頼区間を下記の式を利用して算出します。標本比率 $\hat{p}$ となるう蝕の割合は、

$$\frac{180}{500}=0.36$$

です。

標本比率 $\hat{p}$ の0.36、サンプルサイズ n の500人を代入します。また、信頼度は95％です から、$Z_{\frac{\alpha}{2}}$ は1.96です。

$$\hat{p}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\times\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\leqq p\leqq\hat{p}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\times\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

$$0.36-1.96\times\sqrt{\frac{0.36(1-0.36)}{500}}\leqq p\leqq 0.36+1.96\times\sqrt{\frac{0.36(1-0.36)}{500}}$$

$$0.36-1.96\times\sqrt{\frac{0.36\times 0.64}{500}}\leqq p\leqq 0.36+1.96\times\sqrt{\frac{0.36\times 0.64}{500}}$$

$$0.36-1.96\times\sqrt{\frac{0.2304}{500}}\leqq p\leqq 0.36+1.96\times\sqrt{\frac{0.2304}{500}}$$

$$0.36-1.96\times\sqrt{0.0004608}\leqq p\leqq 0.36+1.96\times\sqrt{0.0004608}$$

$$0.36-1.96\times 0.021466252\leqq p\leqq 0.36+1.96\times 0.021466252$$

$$0.36-0.042\leqq p\leqq 0.36+0.042$$

$$0.318\leqq p\leqq 0.402$$

問11-8

(a)　両側検定での仮説を立てます。

帰無仮説（H_0）：薬品Aにおける不純物濃度は変化していない。

対立仮説（H_1）：薬品Aにおける不純物濃度は変化している。

(b)　母平均の検定量zを次の式で求めます。

$$z=\frac{\bar{x}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}=\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

この式に、母平均 $\mu=290$ ppm、標本平均$\bar{x}=293$ ppm、サンプルサイズ$n=100$、標準偏差 $\sigma=8$を代入します。

$$z=\frac{293-290}{\frac{8}{\sqrt{100}}}=\frac{3}{\frac{8}{10}}=\frac{3}{0.8}=3.75$$

(c)　両側検定における有意水準5％のとき、$|z|\geqq 1.96$が棄却域となりますので、H_0は有意水準5％で棄却されます。

したがって、薬品Aにおける不純物濃度は変化しているといえます。

問11-9

(a)　小さい順（昇順）に血圧値を並び替えます。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
110	117	118	121	124	126	129	130	132	136

(b)　第1四分位数（Q1）を求めます。

25パーセンタイルは、$0.25n+0.75$ですから、$0.25\times 10+0.75=2.5+0.75=3.25$番目と求まります。計算結果が整数にならないので、小さいほうから3番目、4番目の値（118と121）と小数部0.25を下式に代入して、第1四分位数（Q1）を求めます。

$$\mathrm{Qn}=a(k)+t\times\{a(k+1)-a(k)\}\ \cdots\cdots ①$$

$$\mathrm{Q1}=118+0.25\times(121-118)=118+0.25\times 3=118+0.75=118.75\ (\mathrm{mmHg})$$

(c)　第2四分位数（Q2）を求めます。

50パーセンタイルは、$0.5n+0.5$ですから、$0.5\times10+0.5=5+0.5=5.5$番目と求まります。計算結果が整数にならないので、小さいほうから5番目、6番目の値（124と126）と小数部0.5を①の式に代入します。

$$Q2=124+0.5\times(126-124)=124+0.5\times2=124+1=125 \text{（mmHg）}$$

(d) 第3四分位数（Q3）を求めます。

75パーセンタイルは、$0.75n+0.25$ですから、$0.75\times10+0.25=7.5+0.25=7.75$番目と求まります。計算結果が整数にならないので、小さいほうから7番目、8番目の値（129と130）と小数部0.75を①の式に代入します。

$$Q3=129+0.75\times(130-129)=129+0.75\times1=129+0.75=129.75 \text{（mmHg）}$$

(e) 四分位範囲（IQR）

四分位範囲（IQR）＝(第3四分位数)－(第1四分位数)ですから、

$$IQR=129.75-118.75=11 \text{（mmHg）}$$

となります。

答：第1四分位数　118.75 mmHg　　第2四分位数　125 mmHg
第3四分位数　129.75 mmHg
四分位範囲　11 mmHg