

第 1 章

解 1.1. 半径 1 の円を考えて 1 つの点を $(1, 0)$ とすると、もう一方の点は $(\cos \theta, \sin \theta)$ と表すことができます。 θ の取り得る範囲は $0 \leq \theta \leq 2\pi$ で、その大きさは 2π です。線分の長さ r が半径 1 より長くなるのは、 $r^2 = (1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta = 2 - 2\cos \theta > 1$ のときですから、 $\cos \theta < 1/2$ より $\pi/3 < \theta < 5\pi/3$ となり、その大きさは $4\pi/3$ です。したがって、求める確率は $2/3$ です。

解 1.2. 半径 1 の円を考えて 1 点目を $(1, 0)$ として、2 点目を上半円上としても一般性は失いません。2 点目と 3 点目の動径が x 軸となす角を α, β とすると、 (α, β) の取り得る範囲は $0 < \alpha < \pi, 0 < \beta < 2\pi$ で、その面積は $2\pi^2$ です。三角形が原点を含むためには、 $\pi < \beta < \alpha + \pi$ でなければならぬので、その面積は $\pi^2/2$ です。したがって、求める確率は $1/4$ です。

解 1.3. (1) $P(F) = P(F|A)P(A) + P(F|B)P(B) = 0.01 \times 0.6 + 0.06 \times 0.4 = 0.006 + 0.024 = 0.030$

(2)

$$P(A|F) = \frac{P(A \cap F)}{P(F)} = \frac{0.006}{0.030} = 0.20$$

解 1.4. (1)

$$P_1 = {}_3C_2 p^2 (1 - p) = 3p^2 (1 - p)$$

(2) 一番上が男の子である確率は p 、一番上の男の子で男の子が 2 人である

確率は $2p^2(1-p)$ となります。したがって

$$P_2 = \frac{2p^2(1-p)}{p} = 2p(1-p)$$

(3) 少なくとも一人が男の子である確率は $1 - (1-p)^3$ 、男の子が 2 人である確率は P_1 ですから、

$$P_3 = \frac{3p^2(1-p)}{1 - (1-p)^3} = \frac{3p(1-p)}{3 - 3p + p^2}$$

解 1.5. 嘘をつくのを F 、本当のこと言うのを T と表すと、当たり (H) であると言う確率は

$$P(H) = P(T)P(H|T) + P(F)P(H|F) = \frac{4}{5} \frac{3}{100} + \frac{1}{5} \frac{97}{100} = \frac{109}{500}$$

当たりと言ったとき、本当に当たりであるのは

$$P(T|H) = \frac{P(T)P(H|T)}{P(H)} = \frac{12/500}{109/500} = \frac{12}{109}$$

解 1.6. $(n-1)$ 番目までに見つけれない確率は、

$$\frac{1}{n} \times 1 + \frac{n-1}{n}(1-p) = \frac{1 + (1-p)(n-1)}{n} = \frac{n(1-p) + p}{n}$$

また、 n 番目で見つける確率は、

$$\frac{1}{n} \times p + \frac{n-1}{n} \times 0 = \frac{p}{n}$$

よって、 $(n-1)$ 番目までに見つけれなかったときに n 番目で見つける確率は

$$\frac{p}{n(1-p) + p}$$

解 1.7. (1) わかっているときは確率 1、わかっていないときは確率 $1/n$ で正解するので、正解する確率は

$$p \times 1 + (1-p) \times \frac{1}{n} = p + \frac{1-p}{n}$$

(2) まぐれ当たりの確率は

$$\frac{(1-p)/n}{p + (1-p)/n} = \frac{1-p}{np + 1-p}$$

(3) $p = 0.7$ のとき、 $3/(7n + 3) < 0.1$ より、 $n > 27/7$ 、すなわち、4 つ以上の選択肢が必要です。

第 2 章

解 2.1. X の確率分布は

$$P(X=0)=\frac{6}{36}, P(X=k)=\frac{2(k-1)}{36}, k=1, 2, \dots, 6$$

期待値と分散は

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{18} \sum_{k=1}^6 k(k-1) = \frac{35}{9} \\ E(X^2) &= \frac{1}{18} \sum_{k=1}^6 k^2(k-1) = \frac{175}{9} \\ V(X) &= \frac{175}{9} - \left(\frac{35}{9}\right)^2 = \frac{350}{81} \end{aligned}$$

累積確率が

$$P(X \leq m) = \frac{6}{36} + \frac{1}{18} \sum_{k=1}^m (k-1) = \frac{6}{36} + \frac{m(m-1)}{36} \geq 0.5$$

となるのは、 $m \leq -3, m \geq 4$ より、中央値は $m = 4$ です。

解 2.2. X の確率分布は、 $k \geq 2$ に対して

$$P(X=k) = \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-2} = \frac{6}{25} \left(\frac{5}{6}\right)^k$$

となるので、期待値と分散は

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{6}{25} \sum_{k=2}^{\infty} k \left(\frac{5}{6}\right)^k = 7 \\ E(X^2) &= \frac{6}{25} \sum_{k=2}^{\infty} k^2 \left(\frac{5}{6}\right)^k = 79 \\ V(X) &= 79 - 7^2 = 30 \end{aligned}$$

累積確率が

$$P(X \leq m) = \frac{6}{25} \sum_{k=2}^m \left(\frac{5}{6}\right)^k = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{m-1} \geq 0.5$$

となるのは、 $m > 4.8$ より、中央値は $m = 5$ です。

解 2.3. (1)

$$\int_0^c (c-x)dx = \left[cx - \frac{x^2}{2} \right]_0^c = \frac{c^2}{2} = 1$$

より、 $c = \pm\sqrt{2}$ となります。 $f(x) \geq 0$ より $c = \sqrt{2}$ です。期待値と分散は

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^c x(c-x)dx = \left[\frac{c}{2}x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^c = \frac{c^3}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3} \\ E(X^2) &= \int_0^c x^2(c-x)dx = \left[\frac{c}{3}x^3 - \frac{x^4}{4} \right]_0^c = \frac{c^4}{12} = \frac{1}{3} \\ V(X) &= \frac{1}{3} - \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \right)^2 = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

累積確率が

$$P(X \leq m) = \int_0^m (\sqrt{2} - x)dx = \left[\sqrt{2}x - \frac{x^2}{2} \right]_0^m = \sqrt{2}m - \frac{m^2}{2} \geq 0.5$$

となるのは、 $m = \sqrt{2} \pm 1$ より、 $0 < m < \sqrt{2}$ だから、中央値は $m = \sqrt{2} - 1$ です。

(2)

$$\int_0^1 cx^2 dx = \left[\frac{c}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{c}{3} = 1$$

より、 $c = 3$ となります。期待値と分散は

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^1 3x^3 dx = \left[\frac{3}{4} x^4 \right]_0^1 = \frac{3}{4} \\ E(X^2) &= \int_0^1 3x^4 dx = \left[\frac{3}{5} x^5 \right]_0^1 = \frac{3}{5} \\ V(X) &= \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{4} \right)^2 = \frac{3}{80} \end{aligned}$$

累積確率が^s

$$P(X \leq m) = \int_0^m 3x^2 dx = [x^3]_0^m = m^3 = 0.5$$

となるときですから、中央値は $m = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ です。

(3)

$$\int_0^\pi c \sin x dx = [-c \cos x]_0^\pi = 2c = 1$$

より、 $c = \frac{1}{2}$ となります。期待値と分散は

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{2} \int_0^\pi x \sin x dx = \frac{\pi}{2} \\ E(X^2) &= \frac{1}{2} \int_0^\pi x^2 \sin x dx = \frac{\pi^2}{2} - 2 \\ V(X) &= \frac{\pi^2}{2} - 2 - \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 = \frac{\pi^2}{4} - 2 \end{aligned}$$

累積確率が^s

$$P(X \leq m) = \frac{1}{2} \int_0^m \sin x dx = \frac{1}{2} [-\cos x]_0^m = \frac{1}{2} (1 - \cos m) = 0.5$$

となるのは、 $\cos m = 0$ のときですから、中央値は $m = \frac{\pi}{2}$ です。

(4)

$$c \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx = 2\pi c = 1$$

より、 $c = \frac{1}{2\pi}$ となります。期待値と分散は

$$E(X) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^2 x \sqrt{4-x^2} dx = 0$$

$$E(X^2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx = 1$$

$$V(X) = 1 - 0^2 = 1$$

左右対称の分布ですから、中央値は $m = 0$ です。

(5)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-c|x|} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-cx} dx = \frac{2}{c} = 1$$

より、 $c = 2$ となります。期待値と分散は

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-2|x|} dx = 0$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-2|x|} dx = 2 \int_0^{\infty} x^2 e^{-2x} dx = \frac{1}{2}$$

$$V(X) = \frac{1}{2} - 0^2 = \frac{1}{2}$$

左右対称の分布ですから、中央値は $m = 0$ です。

(6)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-cx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{c}} = 1$$

より、 $c = \pi$ となります。期待値と分散は

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\pi x^2} dx = 0 \\ E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\pi x^2} dx = \frac{1}{2\pi} \\ V(X) &= \frac{1}{2\pi} - 0^2 = \frac{1}{2\pi} \end{aligned}$$

左右対称の分布ですから、中央値は $m = 0$ です。

解 2.4. (1) 事前確率は $P(E) = 0.0010$ 、事後確率は $P(E|A) = 0.0472$ ですから、エントロピーは

$$\begin{aligned} H(E) &= 0.0010 \log 0.0010 + 0.9990 \log 0.9990 = 0.0114 \\ H(E|A) &= 0.0472 \log 0.0472 + 0.9528 \log 0.9528 = 0.2744 \end{aligned}$$

したがって、相互情報量は $H(X, A) = 0.2744 - 0.0114 = 0.2630$ です。

(2) 事前確率が p のとき、事後確率は

$$P(E|A) = \frac{0.99p}{0.99p + (1-p)0.02} = \frac{99p}{97p + 2}$$

です。事前確率が $P(E) = 0.01$ のとき、事後確率は $P(E|A) = 0.3333$ ですから、エントロピーは

$$\begin{aligned} H(E) &= 0.0100 \log 0.0100 + 0.9900 \log 0.9900 = 0.0808 \\ H(E|A) &= 0.3333 \log 0.3333 + 0.6667 \log 0.6667 = 0.9183 \end{aligned}$$

したがって、相互情報量は $H(X, A) = 0.9183 - 0.0808 = 0.8375$ です。

第 3 章

解 3.1. (1) $X \sim B(12, 0.075)$ なので、

$$E(X) = 12 \times 0.075 = 0.9$$

$$V(X) = 12 \times 0.075 \times (1 - 0.075) = 0.8325$$

(2)

$$\begin{aligned} \Pr(X \leq 2) &= 0.925^{12} + {}_{12}C_1 0.075^1 0.925^{11} + {}_{12}C_2 0.075^2 0.925^{10} \\ &= 0.3924 + 0.3818 + 0.1702 = 0.9444 \end{aligned}$$

(3) $\lambda = 0.9$ のポアソン分布に近似できるので、

$$\begin{aligned} \Pr(X \leq 2) &= \frac{0.90^0}{0!} e^{-0.9} + \frac{0.90^1}{1!} e^{-0.9} + \frac{0.90^2}{2!} e^{-0.9} \\ &= 0.4066 + 0.3659 + 0.1647 = 0.9372 \end{aligned}$$

解 3.2. r 回生起するまでの試行回数は、1 回生起するまでの試行回数とそこから $(r - 1)$ 回生起するまでの試行回数の和と考えることができるので、これを繰り返すと、1 回生起するまでの試行回数を r 回足し合わせればよいことがわかります。1 回生起するまでの試行回数は幾何分布に従いますので、負の二項分布の期待値と分散は

$$E(X) = \frac{r}{P}, V(X) = \frac{r(1 - P)}{P^2}$$

となります。

解 3.3. (1) 12時 x 分と 12時 y 分にきたとき 2 人が出会えるのは、 $0 \leq x \leq 20$ のとき $0 \leq y \leq x + 20$ 、 $20 < x \leq 40$ のとき $x - 20 < y \leq x + 20$ 、 $40 < x \leq 60$ のとき、 $x - 20 < y \leq 60$ です。 x, y は独立に一様分布 $U(0, 60)$ に従っているので、出会える確率は

$$\frac{1}{60^2} \left\{ \int_0^{20} (x+20)dx + \int_{20}^{40} 40dx + \int_{40}^{60} (80-x)dx \right\} = \frac{5}{9}$$

(2) m 分待つとすると、 $m \leq 30$ では、2 人が出会えるのは、 $0 \leq x \leq m$ のとき $0 \leq y \leq x + m$ 、 $m < x \leq 60 - m$ のとき $x - m < y \leq x + m$ 、 $60 - m < x \leq 60$ のとき、 $x - m < y \leq 60$ です。出会える確率は、(1) と同様の計算によって、 $(120m - m^2)/3600$ となります。 $m = 30$ のときは 0.75 だから 0.9 以上にはなりません。

$m > 30$ では、2 人が出会えるのは、 $0 \leq x \leq 60 - m$ のとき $0 \leq y \leq x + m$ 、 $60 - m < x \leq m$ のとき $0 < y \leq 60$ 、 $m < x \leq 60$ のとき、 $x - m < y \leq 60$ です。出会える確率は、(1) と同様の計算によって、 $(120m - m^2)/3600$ となります。これが 0.9 となる m を求めると、 $m^2 - 120m + 3240 = 0$ より、 $m = 60 \pm 6\sqrt{10}$ です。 $0 < m < 60$ より、 $m = 60 - 6\sqrt{10} = 41.03$ 、すなわち、約 41 分待つ必要があります。

解 3.4. t 秒後の発射点からの距離は $x(t) = v_0 t \cos \theta$ 、高さは $y(t) = v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2}gt^2$ より、落下するまでの時間は $2v_0 \sin \theta / g$ ですから、落下地点までの距離は

$$L = \frac{2v_0^2}{g} \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$$

となります。 θ は一様分布 $U(\pi/4, \pi/3)$ に従います。

(1)

$$E(L) = \frac{12}{\pi} \int_{\pi/4}^{\pi/3} \sin 2\theta d\theta = \frac{3}{\pi}$$

(2)

$$E(L^2) = \frac{12}{\pi} \int_{\pi/4}^{\pi/3} \sin^2 2\theta d\theta = \frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$$

より、

$$V(L) = \frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} - \left(\frac{3}{\pi}\right)^2 = \frac{2\pi^2 + 3\sqrt{3}\pi - 9}{4\pi^2}$$

解 3.5. 幾何分布では

$$\Pr(X \geq n) = \sum_{k=n}^{\infty} P(1-P)^{k-1} = (1-P)^{n-1}$$

より、

$$\Pr(X \geq t+n | X \geq n) = \frac{\Pr(X \geq t+n)}{\Pr(X \geq n)} = \frac{(1-P)^{t+n-1}}{(1-P)^{n-1}} = (1-P)^t$$

となり、 n によりません。

解 3.6. 指数分布では

$$\Pr(X > x) = \frac{1}{\lambda} \int_x^{\infty} e^{-t/\lambda} dt = e^{-x/\lambda}$$

より、

$$\Pr(X > t+a | X > a) = \frac{\Pr(X > t+a)}{\Pr(X > a)} = \frac{e^{-(t+a)/\lambda}}{e^{-a/\lambda}} = e^{-t/\lambda}$$

となり、 a によりません。

解 3.7. (1) Y の確率分布は

$$\Pr(Y = k) = \int_k^{k+1} e^{-x} dx = (1 - e^{-1})e^{-k}, k = 0, 1, 2, \dots$$

となるので、

$$\begin{aligned} E(Y) &= (1 - e^{-1}) \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-k} = \frac{e^{-1}}{1 - e^{-1}} = \frac{1}{e - 1} \\ E(Y^2) &= (1 - e^{-1}) \sum_{k=0}^{\infty} k^2 e^{-k} = \frac{e^{-1} + e^{-2}}{(1 - e^{-1})^2} = \frac{e + 1}{(e - 1)^2} \\ V(Y) &= \frac{e + 1}{(e - 1)^2} - \frac{1}{(e - 1)^2} = \frac{e}{(e - 1)^2} \end{aligned}$$

(2) Z の確率分布は

$$\begin{aligned}\Pr(Z = 0) &= \int_0^{0.5} e^{-x} dx = 1 - e^{-0.5} \\ \Pr(Z = k) &= \int_{k-0.5}^{k+0.5} e^{-x} dx = (e^{0.5} - e^{-0.5})e^{-k}, k = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned}E(Z) &= (e^{0.5} - e^{-0.5}) \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-k} = \frac{e^{-0.5}}{1 - e^{-1}} = \frac{\sqrt{e}}{e - 1} \\ E(Z^2) &= (e^{0.5} - e^{-0.5}) \sum_{k=0}^{\infty} k^2 e^{-k} = \frac{e^{-0.5} + e^{-1.5}}{(1 - e^{-1})^2} = \frac{\sqrt{e}(e + 1)}{(e - 1)^2} \\ V(Z) &= \frac{\sqrt{e}(e + 1)}{(e - 1)^2} - \frac{e}{(e - 1)^2} = \frac{e\sqrt{e} - e + \sqrt{e}}{(e - 1)^2}\end{aligned}$$

解 3.8. 正規分布 $N(68, 12^2)$ に従います。

(1)

$$\Pr(X \geq 80) = \Pr\left(Z \geq \frac{80 - 68}{12}\right) = \Pr(Z \geq 1.00) = 0.1587$$

(2)

$$\Pr(X \leq 60) = \Pr\left(Z \leq \frac{60 - 68}{12}\right) = \Pr(Z \leq -0.67) = 0.2514$$

(3) $\Pr(Z > z) = 0.10$ となるのは $z = 1.282$ のときですから、 $X > 68 + 1.282 \times 12 = 83.4$ が必要です。すなわち、84 点です。

第 4 章

解 4.1. (1) 周辺確率密度関数

$$f_X(x) = \int_0^1 (x+y)dy = \left[xy + \frac{1}{2}y^2 \right]_0^1 = x + \frac{1}{2}$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 (x+y)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + xy \right]_0^1 = y + \frac{1}{2}$$

$$f_X(x)f_Y(y) = (x + \frac{1}{2})(y + \frac{1}{2}) \neq x + y = f(x, y)$$

より、独立ではありません。期待値と分散は

$$E(X) = \int_0^1 x(x + \frac{1}{2})dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2 \right]_0^1 = \frac{7}{12}$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2(x + \frac{1}{2})dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^3 \right]_0^1 = \frac{5}{12}$$

$$V(X) = \frac{5}{12} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{11}{144}$$

X と Y は対称だから

$$E(Y) = E(X) = \frac{7}{12}, V(Y) = V(X) = \frac{11}{144}$$

共分散と相関係数は

$$\begin{aligned}
 E(XY) &= \int_0^1 \int_0^1 xy(x+y)dxdy = \int_0^1 y \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}y \right) dy = \frac{1}{3} \\
 Cov(X, Y) &= \frac{1}{3} - \frac{7}{12} \frac{7}{12} = -\frac{1}{144} \\
 \rho(X, Y) &= \frac{-\frac{1}{144}}{\sqrt{\frac{11}{144} \frac{11}{144}}} = -\frac{1}{11}
 \end{aligned}$$

$Y = a$ のときの条件付き期待値は

$$\begin{aligned}
 f_X(x|Y=a) &= \frac{x+a}{a+\frac{1}{2}} = \frac{2(x+a)}{2a+1} \\
 E(X|Y=a) &= \int_0^1 x \frac{2(x+a)}{2a+1} dx = \frac{3a+2}{3(2a+1)}
 \end{aligned}$$

(2) 周辺確率密度関数

$$\begin{aligned}
 f_X(x) &= \frac{e^{-x}}{c+3} \int_0^\infty ((1+x)e^{-y} + (1+cx)ye^{-y})dy \\
 &= \frac{e^{-x}}{c+3} \{(1+x) + (1+c)x\} = \frac{1}{c+3} \{2 + (1+c)x\} e^{-x} \\
 f_Y(y) &= \frac{1}{c+3} \{2 + (1+c)y\} e^{-y}
 \end{aligned}$$

このとき

$$f_X(x)f_Y(y) = \frac{1}{(c+3)^2} \{2 + (1+c)x\} \{2 + (1+c)y\} e^{-(x+y)}$$

となりますが[§]、 $c=1$ のときは

$$\begin{aligned}
 f_X(x)f_Y(y) &= \frac{1}{4^2} (2+2x)(2+2y)e^{-(x+y)} \\
 &= \frac{1}{4} (1+x+y+xy)e^{-(x+y)} = f(x, y)
 \end{aligned}$$

となるので、独立です。 $c \neq 1$ のときは独立ではありません。期待値と分散は

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{c+3} \int_0^1 x\{2 + (1+c)x\}e^{-x} dx = \frac{2(c+2)}{c+3} \\ E(X^2) &= \frac{1}{c+3} \int_0^1 x^2\{2 + (1+c)x\}e^{-x} dx = \frac{2(3c+5)}{c+3} \\ V(X) &= \frac{2(3c+5)}{c+3} - \left(\frac{2(c+2)}{c+3}\right)^2 = \frac{2(c^2+6c+7)}{(c+3)^2} \end{aligned}$$

X と Y は対称だから

$$E(Y) = E(X) = \frac{2(c+2)}{c+3}, V(Y) = V(X) = \frac{2(c^2+6c+7)}{(c+3)^2}$$

共分散と相関係数は

$$\begin{aligned} E(XY) &= \frac{1}{c+3} \int_0^\infty \int_0^\infty xy(1+x+y+cxy)e^{-(x+y)} dx dy \\ &= \frac{1}{c+3} \int_0^\infty y(1+2+y+2cy)e^{-y} dy = \frac{4c+5}{c+3} \\ Cov(X, Y) &= \frac{4c+5}{c+3} - \frac{2(c+2)}{c+3} \frac{2(c+2)}{c+3} = \frac{c-1}{(c+3)^2} \\ \rho(X, Y) &= \frac{\frac{c-1}{(c+3)^2}}{\sqrt{\frac{2(c^2+6c+7)}{(c+3)^2} \frac{2(c^2+6c+7)}{(c+3)^2}}} = \frac{c-1}{2(c^2+6c+7)} \end{aligned}$$

$c=1$ のとき、 $\rho=0$ です。 $Y=a$ のときの条件付き期待値は

$$\begin{aligned} f_X(x|Y=a) &= \frac{\frac{1}{c+3}(1+x+a+cax)e^{-(x+a)}}{\frac{1}{c+3}\{2+(1+c)a\}e^{-a}} \\ &= \frac{\{1+a+(1+ca)x\}e^{-x}}{2+(1+c)a} \\ E(X|Y=a) &= \int_0^\infty x \frac{\{1+a+(1+ca)x\}e^{-x}}{2+(1+c)a} dx = \frac{3+(1+2c)a}{2+(1+c)a} \end{aligned}$$

$c = 1$ のとき、 $E(X|Y = a) = \frac{3}{2}$ となり、 Y の値 a にはよりにません。

(3) 周辺確率密度関数

$$f_X(x) = \int_0^\infty \frac{2}{(1+x+y)^3} dy = \left[-\frac{1}{(1+x+y)^2} \right]_0^\infty = \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{(1+y)^2}$$

$$f_X(x)f_Y(y) = \frac{1}{(1+x)^2(1+y)^2} \neq f(x, y)$$

より、独立ではありません。

$$E(X) = \int_0^\infty \frac{x}{(1+x)^2} dx = \left[-\frac{x}{1+x} \right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{dx}{1+x} = \infty$$

より、期待値は存在しません。分散も存在しません。 Y についても同様です。共分散と相関係数も存在しません。 $Y = a$ のときの条件付き期待値は

$$f_X(x|Y = a) = \frac{\frac{2}{(1+a+x)^3}}{\frac{1}{(1+a)^2}} = \frac{2(1+a)^2}{(1+a+x)^3}$$

$$E(X|Y = a) = \int_0^\infty x \frac{2(1+a)^2}{(1+a+x)^3} dx = 1 + a$$

このように X, Y の期待値が存在しなくても、一方の値が与えられたら期待値が存在することもあります。 Y が有限の値 a を取れば、 X の期待値も有限の値 $(1+a)$ となります。

(4) 全確率が 1 となるので、

$$\int_0^2 \int_0^1 cy^2 dy dx = \frac{c}{3} \int_0^2 dx = \frac{2c}{3} = 1$$

より、 $c = \frac{3}{2}$ となります。周辺確率密度関数

$$f_X(x) = \frac{3}{2} \int_0^1 y^2 dy = \frac{1}{2}, 0 \leq x \leq 2$$

$$f_Y(y) = \frac{3}{2} \int_0^2 y^2 dx = 3y^2, 0 \leq y \leq 1$$

このとき

$$f_X(x)f_Y(y) = \frac{1}{2} \times 3y^2 = \frac{3}{2}y^2 = f(x, y)$$

より、独立です。期待値と分散は

$$E(X) = \frac{1}{2} \int_0^2 x dx = 1$$

$$E(X^2) = \frac{1}{2} \int_0^2 x^2 dx = \frac{4}{3}$$

$$V(X) = \frac{4}{3} - 1^2 = \frac{1}{3}$$

$$E(Y) = \int_0^1 y \times 3y^2 dy = \frac{3}{4}$$

$$E(Y^2) = \int_0^1 y^2 \times 3y^2 dy = \frac{3}{5}$$

$$V(Y) = \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{80}$$

共分散と相関係数は

$$E(XY) = \frac{3}{2} \int_0^2 \int_0^1 xy \times y^2 dy dx = \frac{3}{4}$$

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{3}{4} - 1 \times \frac{3}{4} = 0$$

$$\rho(X, Y) = 0$$

$Y = a$ のときの条件付き期待値は $E(X|Y = a) = E(X) = 1$ です。

(5) 全確率が 1 となるので、

$$\int_0^1 \int_0^x cx^2 y dy dx = c \int_0^1 \frac{x^4}{2} dx = \frac{c}{10} = 1$$

より、 $c = 10$ となります。周辺確率密度関数は

$$f_X(x) = 10x^2 \int_0^x y dy = 5x^4, 0 \leq x \leq 1$$

$$f_Y(y) = 10y \int_y^1 x^2 dx = \frac{10}{3}(y - y^4), 0 \leq y \leq 1$$

$f_X(x)f_Y(y) \neq f(x, y)$ より、独立ではありません。期待値と分散は

$$E(X) = \int_0^1 x \times 5x^4 dx = \frac{5}{6}$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 \times 5x^4 dx = \frac{5}{7}$$

$$V(X) = \frac{5}{7} - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{5}{252}$$

$$E(Y) = \frac{10}{3} \int_0^1 y \times (y - y^4) dy = \frac{5}{9}$$

$$E(Y^2) = \frac{10}{3} \int_0^1 y^2 \times (y - y^4) dy = \frac{5}{14}$$

$$V(Y) = \frac{5}{14} - \left(\frac{5}{9}\right)^2 = \frac{55}{1134}$$

共分散と相関係数は

$$E(XY) = 10 \int_0^1 \int_0^x xy \times x^2 y dy dx = 10 \int_0^1 x^3 \frac{x^3}{3} dx = \frac{10}{21}$$

$$Cov(X, Y) = \frac{10}{21} - \frac{5}{6} \frac{5}{9} = \frac{5}{378}$$

$$\rho(X, Y) = \frac{\frac{5}{378}}{\sqrt{\frac{5}{252} \frac{55}{1134}}} = \frac{\sqrt{22}}{11}$$

$Y = a$ のときの条件付き期待値は

$$f(X|Y = a) = \frac{10ax^2}{\frac{10}{3}(a - a^4)} = \frac{3x^2}{1 - a^3}$$

$$E(X|Y = a) = \int_a^1 x \frac{3x^2}{1 - a^3} dx = \frac{3}{4} \frac{1 - a^4}{1 - a^3} = \frac{3}{4} \frac{1 + a + a^2 + a^3}{1 + a + a^2}$$

解 4.2. $V(X) = V(Y) = \sigma^2$ とすると, $Cov(X, Y) = \rho\sigma^2$ より、 Z と W の共分散 $Cov(Z, W)$ を求めると

$$\begin{aligned} Cov(Z, W) &= Cov(aX + Y, X + aY) \\ &= aV(X) + (1 + a^2)Cov(X, Y) + aV(Y) \\ &= a\sigma^2 + (1 + a^2)\rho\sigma^2 + a\sigma^2 \\ &= (\rho a^2 + 2a + \rho)\sigma^2 \end{aligned}$$

となります。無相関となるのは $Cov(Z, W) = 0$ のときですから、

$$a = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - \rho^2}}{\rho}$$

解 4.3. $V(X) = V(Y) = \sigma^2$ とします。 X と Y は独立ですから、 X と $aX + Y$ の共分散は $Cov(X, aX + Y) = aV(X) + Cov(X, Y) = a\sigma^2$ です。相関係数は

$$\rho(X, aX + Y) = \frac{Cov(X, aX + Y)}{\sqrt{V(X)V(aX + Y)}} = \frac{a\sigma^2}{\sqrt{\sigma^2(a^2\sigma^2 + \sigma^2)}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

となります。したがって、相関係数が r となるのは、

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}} = r$$

より、

$$a = \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}}$$

解 4.4. (1) Y の分散を求めると、

$$\begin{aligned} V(Y) &= V(w_1 X_1 + w_2 X_2) = w_1^2 V(X_1) + w_2^2 V(X_2) \\ &= w_1^2 \sigma_1^2 + (1 - w_1)^2 \sigma_2^2 = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) w_1^2 - 2\sigma_2^2 w_1 + \sigma_2^2 \end{aligned}$$

これが最小となる w_1 を求めるために、 w_1 で微分して

$$\frac{dV}{dw_1} = 2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)w_1 - 2\sigma_2^2 = 0$$

より、

$$w_1 = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}, w_2 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

のときに y の分散が最小となります。

(2) 最も精度よく推測するには、

$$w_1 = \frac{2^2}{1^2 + 2^2} = 0.8, w_2 = \frac{1^2}{1^2 + 2^2} = 0.2$$

とした加重平均を求めればよいので、推測値は $0.8 \times 24.3 + 0.2 \times 24.4 = 24.32$ となります。

第 5 章

解 5.1. (1) 同時分布関数は

$$\begin{aligned}
 F_Y(y_1, y_2) &= \Pr(Y_1 \leq y_1, Y_2 \leq y_2) \\
 &= \Pr(Y_1 \leq y_1) - \Pr(Y_1 \leq y_1, Y_2 \geq y_2) \\
 &= \{\Pr(X \leq y_1)\}^n - \{\Pr(y_2 \leq X \leq y_1)\}^n \\
 &= y_1^n - (y_1 - y_2)^n
 \end{aligned}$$

となるので、同時確率密度関数は

$$f_Y(y_1, y_2) = \frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial y_2}(y_1, y_2) = n(n-1)(y_1 - y_2)^{n-2}$$

(2) S と R の同時確率密度関数は、ヤコビアンが 2 であることより、

$$f_{SR}(s, r) = \frac{n(n-1)}{2}(y_1 - y_2)^n = \frac{n(n-1)}{2}r^{n-2}, 0 \leq r \leq s, r+s \leq 2$$

です。 (s, r) の範囲は、 $y_1 = (s+r)/2, y_2 = (s-r)/2$ がともに 0 から 1 であることから求められます。このとき、 S の周辺密度関数は、 $0 \leq s \leq 1$ のとき、

$$f_S(s) = \frac{n(n-1)}{2} \int_0^s r^{n-2} dr = \frac{n}{2} s^{n-1}$$

$1 \leq s \leq 2$ のとき、

$$f_S(s) = \frac{n(n-1)}{2} \int_0^{2-s} r^{n-2} dr = \frac{n}{2} (2-s)^{n-1}$$

R の周辺密度関数は

$$f_R(r) = \frac{n(n-1)}{2} \int_r^{2-r} r^{n-2} ds = n(n-1)(1-r)r^{n-2}$$

(3) S の期待値と分散

$$\begin{aligned} E(S) &= \frac{n}{2} \int_0^1 s^n ds + \frac{n}{2} \int_1^2 s(2-s)^{n-1} ds = 1 \\ E(R^2) &= \frac{n}{2} \int_0^1 s^{n+1} ds + \frac{n}{2} \int_1^2 s^2(2-s)^{n-1} ds = \frac{n^2 + 3n + 4}{(n+1)(n+2)} \\ V(S) &= \frac{n^2 + 3n + 4}{(n+1)(n+2)} - 1^2 = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

R の期待値と分散

$$\begin{aligned} E(R) &= n(n-1) \int_0^1 r(1-r)r^{n-2} dr = \frac{n-1}{n+1} \\ E(R^2) &= n(n-1) \int_0^1 r^2(1-r)r^{n-2} dr = \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)} \\ V(R) &= \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)} - \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 = \frac{2(n-1)}{(n+1)^2(n+2)} \end{aligned}$$

(4) 例 5.1 より、 $V(Y_1) = V(Y_2) = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}$ です。 $V(R) = V(Y_1 - Y_2) = V(Y_1) + V(Y_2) - 2Cov(Y_1, Y_2)$ から、

$$Cov(Y_1, Y_2) = V(Y_1) - \frac{1}{2}V(R) = \frac{1}{(n+1)^2(n+2)}$$

となります。相関係数は

$$\rho(Y_1, Y_2) = \frac{Cov(Y_1, Y_2)}{\sqrt{V(Y_1)V(Y_2)}} = \frac{1}{n}$$

解 5.2. 指数分布の分布関数が $F_X(x) = 1 - e^{-x}$ です。最大値 Y_1 、中央値 Y_2 、最小値 Y_3 の分布関数、確率密度関数、期待値、分散を順に求めます。

まず、最大値では、

$$\begin{aligned}
 F_1(y) &= \{F_X(y)\}^3 = (1 - e^{-y})^3 = 1 - 3e^{-y} + 3e^{-2y} - e^{-3y} \\
 f_1(y) &= 3e^{-y} - 6e^{-2y} + 3e^{-3y} \\
 E(Y_1) &= \int_0^{\infty} y(3e^{-y} - 6e^{-2y} + 3e^{-3y})dy = \frac{11}{6} \\
 E(Y_1^2) &= \int_0^{\infty} y^2(3e^{-y} - 6e^{-2y} + 3e^{-3y})dy = \frac{85}{18} \\
 V(Y_1) &= \frac{85}{18} - \left(\frac{11}{6}\right)^2 = \frac{49}{36}
 \end{aligned}$$

中央値では、

$$\begin{aligned}
 F_2(y) &= 3\{F_X(y)\}^2 - 2\{F_X(y)\}^3 = (1 + 2e^{-y})(1 - e^{-y})^2 \\
 &= 1 - 3e^{-2y} + 2e^{-3y} \\
 f_2(y) &= 6e^{-2y} - 6e^{-3y} \\
 E(Y_2) &= \int_0^{\infty} y(6e^{-2y} - 6e^{-3y})dy = \frac{5}{6} \\
 E(Y_2^2) &= \int_0^{\infty} y^2(6e^{-2y} - 6e^{-3y})dy = \frac{19}{18} \\
 V(Y_2) &= \frac{19}{18} - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{13}{36}
 \end{aligned}$$

最小値では、

$$\begin{aligned}
 F_3(y) &= 1 - \{1 - F_X(y)\}^3 = 1 - e^{-3y} \\
 f_3(y) &= 3e^{-3y} \\
 E(Y_3) &= \int_0^{\infty} 3y3e^{-3y}dy = \frac{1}{3} \\
 E(Y_3^2) &= \int_0^{\infty} 3y^2e^{-3y}dy = \frac{19}{18} \\
 V(Y_3) &= \frac{2}{9} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}
 \end{aligned}$$

解 5.3. このシステムは、 $Y = \min\{X_1, \max\{X_2, X_3\}\}$ と表現することができます。 Y の分布関数は

$$\begin{aligned}
 F_Y(y) &= \Pr(Y \leq y) = 1 - \Pr(\min\{X_1, \max\{X_2, X_3\}\} \geq y) \\
 &= 1 - \Pr(X_1 \geq y) \Pr(\max\{X_2, X_3\} \geq y) \\
 &= 1 - \Pr(X_1 \geq y) \{1 - \Pr(\max\{X_2, X_3\} < y)\} \\
 &= 1 - \Pr(X_1 \geq y) \{1 - \Pr(X_2 \leq y, X_3 \leq y)\} \\
 &= 1 - \{1 - F_X(y)\} \{1 - \{F_X(y)\}^2\} \\
 &= F_X(y) + \{F_X(y)\}^2 - \{F_X(y)\}^3
 \end{aligned}$$

X の分布関数は $F_X(y) = 1 - e^{-y}$ ですから、 Y の分布関数は

$$F_Y(y) = (1 + e^{-y}) + (1 - e^{-y})^2 - (1 - e^{-y})^3 = 1 - 2e^{-2y} + 3e^{-3y}$$

となるので、 Y の確率密度関数は

$$f_Y(y) = 4e^{-2y} - 3e^{-3y}$$

Y の期待値と分散は

$$\begin{aligned}
 E(Y) &= \int_0^\infty y(4e^{-2y} - 3e^{-3y})dy = \frac{2}{3} \\
 E(Y^2) &= \int_0^\infty y^2(4e^{-2y} - 3e^{-3y})dy = \frac{7}{9} \\
 V(Y) &= E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{7}{9} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}
 \end{aligned}$$

解 5.4. Z の分布関数を

$$F_Z(z) = \Pr(X + Y \leq z) = \iint_{x+y \leq z} f_X(x) f_Y(y) dx dy$$

から求めると、 $0 \leq z \leq 1$ のとき、

$$F_Z(z) = \int_0^z \int_0^{z-y} e^{-x} dx dy = z - 1 + e^{-z}$$

より、

$$f_Z(z) = 1 - e^{-z}$$

$z \geq 1$ のとき、

$$F_Z(z) = \int_0^1 \int_0^{z-y} e^{-x} dx dy = 1 - e^{1-z} + e^{-z}$$

より、

$$f_Z(z) = e^{1-z} - e^{-z} = (e-1)e^{-z}$$

このとき、期待値と分散は

$$\begin{aligned} E(Z) &= \int_0^1 z(1 - e^{-z})dz + \int_1^\infty (e-1)ze^{-z}dz = \frac{3}{2} \\ E(Z^2) &= \int_0^1 z^2(1 - e^{-z})dz + \int_1^\infty (e-1)z^2e^{-z}dz = \frac{10}{3} \\ V(Z) &= \frac{10}{3} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{13}{12} \end{aligned}$$

解 5.5. $Y_2 = Y_1 + X$ の分布関数は

$$F_2(y) = \int_0^y \int_0^{y-x_2} e^{-(x_1+x_2)} dx_1 dx_2 = 1 - e^{-y} - ye^{-y}$$

より、 Y_2 の確率密度関数は

$$f_2(y) = ye^{-y}$$

$Y_3 = Y_2 + X$ の分布関数は

$$F_3(z) = \int_0^z \int_0^{z-x} e^{-y} dy x e^{-x} dx = 1 - \left(1 + z + \frac{z^2}{2}\right) e^{-z}$$

より、 Y_3 の確率密度関数は

$$f_3(z) = \frac{z^2}{2} e^{-z}$$

これより、 Y_n の確率密度関数は

$$f_n(z) = \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} e^{-z}$$

と推測されます。 $n = 1$ のときは成立します。 $n = k$ のときに成立すると仮定すると

$$F_{k+1}(z) = \int_0^z \int_0^{z-x} e^{-y} dy f_k(x) dx = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^z x^{k-1} (e^{-x} - e^{-z}) dx$$

より、これを微分して

$$f_{k+1}(z) = \frac{1}{(k-1)!} e^{-z} \int_0^z x^{k-1} dx = \frac{z^k}{k!} e^{-z}$$

となり、 $n = k + 1$ でも成立します。

解 5.6. 一様分布の分布関数は $F_X(x) = \Pr(X \leq x) = x, 0 < x < 1$

(1) Y の分布関数は、 $1 < y < e$ に対して

$$F_Y(y) = \Pr(e^X \leq y) = \Pr(X \leq \log y) = F_X(\log y) = \log y$$

より、確率密度関数、期待値と分散は、

$$f_Y(y) = \frac{1}{y}, 1 < y < e$$

$$E(Y) = \int_1^e y \frac{1}{y} dy = e - 1$$

$$E(Y^2) = \int_1^e y^2 \frac{1}{y} dy = \frac{e^2 - 1}{2}$$

$$V(Y) = \frac{e^2 - 1}{2} - (e - 1)^2 = \frac{-e^2 + 4e - 3}{2}$$

(2) Y の分布関数は、 $0 < y < 1$ に対して

$$F_Y(y) = \Pr(X^2 \leq y) = \Pr(X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) = \sqrt{y}$$

より、確率密度関数、期待値と分散は、

$$\begin{aligned}
 f_Y(y) &= \frac{1}{2\sqrt{y}}, 0 \leq y \leq 1 \\
 E(Y) &= \int_0^1 y \frac{1}{2\sqrt{y}} dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{y} dy = \frac{1}{3} \\
 E(Y^2) &= \int_0^1 y^2 \frac{1}{2\sqrt{y}} dy = \frac{1}{2} \int_0^1 y \sqrt{y} dy = \frac{1}{5} \\
 V(Y) &= \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{45}
 \end{aligned}$$

(3) Y の分布関数は、 $y > 1$ に対して

$$F_Y(y) = \Pr\left(\frac{1}{X} \leq y\right) = \Pr\left(X \geq \frac{1}{y}\right) = 1 - F_X\left(\frac{1}{y}\right) = 1 - \frac{1}{y}$$

より、確率密度関数、期待値は、

$$\begin{aligned}
 f_Y(y) &= \frac{1}{y^2}, y \geq 1 \\
 E(Y) &= \int_1^\infty y \frac{1}{y^2} dy = \int_1^\infty \frac{1}{y} dy = \infty
 \end{aligned}$$

となり、期待値は存在しない。また、分散も存在しない。

(4) Y の分布関数は、 $y > 0$ に対して

$$\begin{aligned}
 F_Y(y) &= \Pr\left(\tan\left(\frac{\pi}{2}X\right) \leq y\right) = \Pr\left(X \leq \frac{2}{\pi} \tan^{-1} y\right) \\
 &= F_X\left(\frac{2}{\pi} \tan^{-1} y\right) = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} y
 \end{aligned}$$

より、確率密度関数、期待値と分散は、

$$\begin{aligned}
 f_Y(y) &= \frac{2}{\pi} \frac{1}{1+y^2}, y \geq 0 \\
 E(Y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{y}{1+y^2} dy = \frac{1}{\pi} [\log(1+y^2)]_0^\infty = \infty
 \end{aligned}$$

となり、期待値は存在しない。また、分散も存在しない。

(5) Y の分布関数は、 $0 < y < 1$ に対して

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \Pr(\sin(\pi X) \leq y) = \Pr\left(X \leq \frac{1}{\pi} \sin^{-1} y\right) \\ &= F_X\left(\frac{1}{\pi} \sin^{-1} y\right) = \frac{1}{\pi} \sin^{-1} y \end{aligned}$$

より、確率密度関数、期待値と分散は、

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, 0 \leq y \leq 1 \\ E(Y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} dy = \frac{1}{\pi} \\ E(Y^2) &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}} dy = \frac{1}{4} \\ V(Y) &= \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{\pi}\right)^2 = \frac{\pi^2 - 4}{4\pi^2} \end{aligned}$$

解 5.7. 2つの点は $(0, 1)$ と $(\cos \theta, \sin \theta)$ とおけるので、2点を結んでできる線分の長さを X とすると、 $X = \sqrt{2 - 2\cos \theta}$ と表せます。このとき、 $0 \leq r \leq 2$ に対して

$$\begin{aligned} F(x) &= \Pr(X \leq r) = \Pr(0 < 2 - 2\cos \theta \leq r^2) = \Pr\left(\cos \theta \geq 1 - \frac{r^2}{2}\right) \\ &= \frac{1}{\pi} \cos^{-1} \left(1 - \frac{r^2}{2}\right) \end{aligned}$$

となるので、確率密度関数、期待値と分散は

$$\begin{aligned} f(r) &= \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{4-r^2}}, 0 < r < 2 \\ E(X) &= \frac{2}{\pi} \int_0^2 \frac{r}{\sqrt{4-r^2}} dr = \frac{4}{\pi} \\ E(X^2) &= \frac{2}{\pi} \int_0^2 \frac{r^2}{\sqrt{4-r^2}} dr = 2 \\ V(X) &= 2 - \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 = \frac{2\pi^2 - 16}{\pi^2} \end{aligned}$$

解 5.8.

$$\begin{aligned}
 E(\sin X) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx \\
 &= \Im \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} + ix\right) dx \right] \\
 &= \Im \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu+i\sigma^2)^2}{2\sigma^2} + i\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dx \right] \\
 &= \Im \left[\exp\left(i\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \right] = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2} \sin \mu
 \end{aligned}$$

解 5.9. Y の分布関数は、 $y \geq 1$ に対して

$$F_Y(y) = \Pr(e^X \leq y) = \Pr(X \leq \log y) = F_X(\log y) = 1 - y^{-1/\lambda}$$

より、 Y の確率密度関数は

$$f_Y(y) = \frac{1}{\lambda} y^{-1/\lambda-1}, \quad y \geq 1$$

期待値は

$$E(Y) = \int_1^{\infty} y \times \frac{1}{\lambda} y^{-1/\lambda-1} dy = \begin{cases} \frac{1}{1-\lambda} & \lambda < 1 \\ \infty & \lambda \geq 1 \end{cases}$$

より、 $\lambda < 1$ のときに存在し、 $\lambda \geq 1$ のときには存在しません。 $\lambda < 1$ のとき、

$$E(Y^2) = \int_1^{\infty} y^2 \times \frac{1}{\lambda} y^{-(1/\lambda+1)} dy = \begin{cases} \frac{1}{1-2\lambda} & \lambda < 0.5 \\ \infty & \lambda \geq 0.5 \end{cases}$$

より、 $\lambda < 0.5$ のときには分散が存在して、

$$V(Y) = \frac{1}{1-2\lambda} - \left(\frac{1}{1-\lambda} \right)^2 = \frac{\lambda^2}{(1-2\lambda)(1-\lambda)^2}$$

となります。 $\lambda \geq 0.5$ のときには分散は存在しません。

解 5.10. Y の分布関数を $\Phi(x)$ とおくと、 X の分布関数は

$$F_X(x) = \Pr(X \leq x) = \Pr(\log X \leq \log x) = \Pr(Y \leq \log x) = \Phi(\log x)$$

より、確率密度関数、期待値と分散は、

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{x} \phi(\log x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}x} \exp\left(-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \\ E(X) &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) e^y dy \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y - \mu)^2 - 2\sigma^2 y}{2\sigma^2}\right) dy \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y - \mu - \sigma^2)^2}{2\sigma^2} + \mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) dy \\ &= e^{\mu + \sigma^2/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) e^{2y} dy \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y - \mu)^2 - 4\sigma^2 y}{2\sigma^2}\right) dy \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y - \mu - 2\sigma^2)^2}{2\sigma^2} + 2\mu + 2\sigma^2\right) dy \\ &= e^{2\mu + 2\sigma^2} \end{aligned}$$

$$V(Y) = e^{2\mu + 2\sigma^2} - e^{2\mu + \sigma^2} = e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$$

解 5.11. ヤコビアンを求めると

$$\left\| \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ \frac{1}{x_2} & -\frac{x_1}{x_2^2} \end{pmatrix} \right\| = \frac{2x_1}{x_2} = 2y_2$$

より、 Y_1 と Y_2 の同時確率密度関数は

$$f_Y(y_1, y_2) = \frac{8x_1x_2}{2y_2} = \frac{4y_1}{y_2}, y_1 \leq y_2 \leq 1$$

となります。ここで、 $0 < \sqrt{y_1 y_2} < \sqrt{y_1 / y_2} < 1$ から (y_1, y_2) の範囲を求めています。積 Y_1 の周辺密度関数は

$$f_1(y_1) = \int_{y_1}^1 \frac{4y_1}{y_2} dy_2 = -4y_1 \log y_1$$

商 Y_2 の周辺密度関数は

$$f_2(y_2) = \int_0^{y_2} \frac{4y_1}{y_2} dy_1 = 2y_2$$

となります。このとき、 Y_1 および Y_2 の期待値と分散は

$$E(Y_1) = -4 \int_0^1 y_1 \times y_1 \log y_1 dy_1 = \frac{4}{9}$$

$$E(Y_1^2) = -4 \int_0^1 y_1^2 \times y_1 \log y_1 dy_1 = \frac{1}{4}$$

$$V(Y_1) = \frac{1}{4} - \left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{17}{324}$$

$$E(Y_2) = \int_0^1 y_2 \times 2y_2 dy_2 = \frac{2}{3}$$

$$E(Y_2^2) = \int_0^1 y_2^2 \times 2y_2 dy_2 = \frac{1}{2}$$

$$V(Y_2) = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$$

解 5.12. ヤコビアンは $2y_2$ ですから同時確率密度関数は

$$\begin{aligned} f_Y(y_1, y_2) &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2\sigma^2}\right) \frac{1}{2y_2} \\ &= \frac{1}{4\pi\sigma^2} \frac{1}{y_2} \exp\left\{-\frac{y_1}{2\sigma^2} \left(y_2 + \frac{1}{y_2}\right)\right\} \end{aligned}$$

となります。ここで、 $x_1^2 = y_1/y_2$, $x_2^2 = y_1 y_2$ より (y_1, y_2) の範囲は $y_1 y_2 > 0$ となります。商 Y_2 の周辺密度関数は、 $y_2 > 0$ のとき

$$f_2(y_2) = \frac{1}{4\pi\sigma^2 y_2} \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{y_1}{2\sigma^2} \left(y_2 + \frac{1}{y_2}\right)\right\} dy_1 = \frac{1}{2\pi(1 + y_2^2)}$$

$y_2 < 0$ のとき

$$f_2(y_2) = \frac{1}{4\pi\sigma^2 y_2} \int_{-\infty}^0 \exp \left\{ -\frac{y_1}{2\sigma^2} \left(y_2 + \frac{1}{y_2} \right) \right\} dy_1 = \frac{1}{2\pi(1+y_2^2)}$$

となりますから、商 Y_2 の周辺密度関数は

$$f_2(y_2) = \frac{1}{2\pi(1+y_2^2)}$$

となります。この分布はコーシー分布となり、期待値は存在しません。

第 6 章

解 6.1. 積率母関数は、

$$\phi_X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{tk} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{e^t}{2}\right)^k = \frac{e^t}{2 - e^t}$$

となるので、

$$\begin{aligned}\phi'_X(0) &= E(X) = \left. \frac{2e^t}{(2 - e^t)^2} \right|_{t=0} = 2 \\ \phi''_X(0) &= E(X^2) = \left. \frac{2e^t(2 + e^t)}{(2 - e^t)^3} \right|_{t=0} = 6\end{aligned}$$

より、期待値と分散は

$$E(X) = 2, V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 6 - 2^2 = 2$$

解 6.2. 積率母関数は、

$$\phi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} p(1-p)^k = \sum_{k=0}^{\infty} p((1-p)e^t)^k = \frac{p}{1 - (1-p)e^t}$$

解 6.3. 積率母関数は、

$$\phi_X(t) = \int_0^{\infty} e^{tx} \frac{x^{n-1} e^{-x/\lambda}}{\lambda^n (n-1)!} dx = \int_0^{\infty} \frac{x^{n-1} e^{-(1/\lambda - t)x}}{\lambda^n (n-1)!} dx = \frac{1}{(1 - \lambda t)^n}$$

解 6.4. X の積率母関数は

$$\phi_X(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2t}$$

より、 n 個の和 W の積率母関数は

$$\phi_W(t) = \frac{(e^t - e^{-t})^n}{2^n t^n}$$

となります。したがって、平均の積率母関数は

$$\phi_M(t) = \phi_W\left(\frac{t}{n}\right) = \frac{(e^{t/n} - e^{-t/n})^n}{2^n (t/n)^n}$$

解 6.5.

$$M'(t) = \frac{\phi_X'(t)}{\phi_X(t)}, M''(t) = \frac{\phi_X''(t)\phi_X(t) - \phi_X'(t)^2}{\phi_X(t)^2}$$

より、 $M'(0) = \mu, M''(0) = \sigma^2$ が得られます。

第 7 章

解 7.1. (1) $Y = \sin X$ のとき、 $Y' = \cos X, Y'' = -\sin X$ より、

$$E(Y) = \sin \mu - \frac{\sin \mu}{2} \sigma^2 = \left(1 - \frac{\sigma^2}{2}\right) \sin \mu$$

$$V(Y) = \cos^2 \mu \times \sigma^2 = \sigma^2 \cos^2 \mu$$

(2) $Y = \log X$ のとき、 $Y' = 1/X, Y'' = -1/X^2$ より、

$$E(Y) = \log \mu - \frac{1}{2\mu^2} \sigma^2 = \log \mu - \frac{\sigma^2}{2\mu^2}$$

$$V(Y) = \frac{1}{\mu^2} \times \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{\mu^2}$$

(3) $Y = 1/X$ のとき、 $Y' = -1/X^2, Y'' = 2/X^3$ より、

$$E(Y) = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu^3} \sigma^2 = \frac{1}{\mu} + \frac{\sigma^2}{\mu^3}$$

$$V(Y) = \left(-\frac{1}{\mu^2}\right)^2 \times \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{\mu^4}$$

(4) $Y = X^3$ のとき、 $Y' = 3X^2, Y'' = 6X$ より、

$$E(Y) = \mu^3 + 3\mu\sigma^2$$

$$V(Y) = (3\mu^2)^2 \times \sigma^2 = 9\mu^4\sigma^2$$

(5) $Y = e^X$ のとき、 $Y' = Y'' = e^X$ より、

$$\begin{aligned} E(Y) &= e^\mu + \frac{e^\mu}{2}\sigma^2 = e^\mu \left(1 + \frac{\sigma^2}{2}\right) \\ V(Y) &= (e^\mu)^2 \times \sigma^2 = e^{2\mu}\sigma^2 \end{aligned}$$

解 7.2. (1) $R = R_1 + R_2$ より、 $V(R) = \sigma^2 + \sigma^2 = 2 \times 0.5^2 = 0.707(\Omega)^2$

(2) $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ より、 $\frac{\partial R}{\partial R_1} = \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2} = \frac{10^2}{20^2} = 0.25$ を用いて、
 $V(R) = 0.25^2 \sigma^2 + 0.25^2 \times \sigma^2 = 2 \times 0.25^2 \times 0.5^2 = 0.177(\Omega)^2$

解 7.3.

$$\begin{aligned} \sigma_V^2 &= \left(\frac{dV}{da}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{dV}{db}\right)^2 \sigma_b^2 + \left(\frac{dV}{dc}\right)^2 \sigma_c^2 \\ &= (bc)^2 \sigma_a^2 + (ca)^2 \sigma_b^2 + (ab)^2 \sigma_c^2 \end{aligned}$$

このうち最も大きい係数は $(bc)^2$ ですから、最も精度に影響を及ぼすのは、最も短い辺の精度 σ_a です。

解 7.4. (1)

$$\sigma_x^2 = \left(\frac{dL}{d\alpha}\right)^2 \sigma^2 + \left(\frac{dL}{d\beta}\right)^2 \sigma^2 = \frac{L^2(\sin^4 \alpha + \sin^4 \beta)}{\sin^4(\alpha + \beta)} \sigma^2$$

より、

$$\sigma_x = \frac{L\sqrt{\sin^4 \alpha + \sin^4 \beta}}{\sin^2(\alpha + \beta)}$$

(2) $\alpha = \beta$ のとき、 $x = \frac{L \tan \alpha}{2}$ となるので、

$$\sigma_x^2 = \left(\frac{dL}{d\alpha}\right)^2 \sigma^2 = \frac{L^2}{4 \cos^4 \alpha} \sigma^2$$

$$\text{すなわち、} \sigma_x = \frac{L}{2 \cos^2 \alpha}$$

(3) (1)において、 $\alpha = \beta$ とすると、

$$\sigma_x = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{L}{\cos^2 \alpha} = 0.3536 \frac{L}{\cos^2 \alpha} < \frac{L}{2 \cos^2 \alpha}$$

となります。つまり、 $\alpha = \beta$ であっても、それぞれの角度を測定したときの方が精度が高くなります。

解 7.5. (1) $x = vt \tan \alpha$

(2)

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = \frac{vt}{\cos^2 \alpha}$$

より、

$$\Delta x = \frac{vt}{\cos^2 \alpha} \Delta \alpha$$

(3)

$$(\Delta x)^2 = \left(\frac{vt}{\cos^2 \alpha} \right)^2 (\Delta \alpha)^2 + (v \tan \alpha)^2 (\Delta t)^2 + (t \tan \alpha)^2 (\Delta v)^2$$

より、

$$\left(\frac{\Delta x}{x} \right)^2 = \left(\frac{\alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} \right)^2 \left(\frac{\Delta \alpha}{\alpha} \right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{t} \right)^2 + \left(\frac{\Delta v}{v} \right)^2$$

(4)

$$\frac{\alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{4\sqrt{3}\pi}{9} = 2.4$$

ですから、角度 α が最も影響を及ぼします。

第 8 章

解 8.1. $n = 1$ のとき、

$$f(x) = \frac{1}{2^{1/2}\Gamma(1/2)} x^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-x/2}$$

となり、これが自由度 1 の χ^2 分布の確率密度関数です。自由度 n の χ^2 分布に従う確率変数 X と自由度 1 の χ^2 分布に従う確率変数 Y の和 $Z = X + Y$ の確率密度関数を求めると、(5.5) 式より、

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_0^z \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \times \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{2})} (z-x)^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{z-x}{2}} dx \\ &= \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^z x^{\frac{n}{2}-1} (z-x)^{\frac{1}{2}-1} dx \cdot e^{-\frac{z}{2}} \\ &= \frac{\int_0^1 y^{\frac{n}{2}-1} (1-y)^{\frac{1}{2}-1} dy}{2^{\frac{n+1}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} z^{\frac{n+1}{2}-1} e^{-\frac{z}{2}}, \quad (x = zy \text{ とおく}) \\ &= \frac{B(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})}{2^{\frac{n+1}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} z^{\frac{n+1}{2}-1} e^{-\frac{z}{2}} \end{aligned}$$

となります。ここで、

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \quad (8.1)$$

より、 Z の確率密度関数は

$$f(z) = \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}\Gamma(\frac{n+1}{2})} z^{\frac{n+1}{2}-1} e^{-\frac{z}{2}}$$

となり、自由度 $n+1$ の χ^2 分布の確率密度関数となります。したがって、

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \quad (8.2)$$

解 8.2. X と Y の同時確率密度関数は

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \times \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}$$

です。ここで、 $S = Y, T = X/\sqrt{Y/n}$ と変数変換すると、 $X = T\sqrt{S/n}, Y = S$ となり、ヤコビアンは

$$\|J\| = \left\| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \sqrt{\frac{n}{y}} & -\frac{\sqrt{nx}}{2y\sqrt{y}} \end{array} \right\| = \sqrt{\frac{n}{s}}$$

となります。 S と T の同時確率密度関数が

$$\begin{aligned} f_{ST}(s, t) &= \sqrt{\frac{s}{n}} f_{XY}(x, y) = \sqrt{\frac{s}{n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi} 2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} e^{-\frac{st^2}{2n}} s^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{s}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2n\pi} 2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} e^{-\frac{s}{2}(1+\frac{t^2}{n})} s^{\frac{n+1}{2}-1} \end{aligned}$$

となるので、 T の周辺密度関数を求めると、

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2n\pi} 2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^\infty e^{-\frac{s}{2}(1+\frac{t^2}{n})} s^{\frac{n+1}{2}-1} ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{n\pi} \Gamma(\frac{n}{2})} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \int_0^\infty e^{-z} z^{\frac{n+1}{2}-1} dz, \quad \left(z = \frac{s}{2} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)\right) \\ &= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi} \Gamma(\frac{n}{2})} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \end{aligned}$$

解 8.3. 自由度 n_1 の χ^2 分布に従う確率変数 X_1 と自由度 n_2 の χ^2 分布に従う確率変数 X_2 が互いに独立であるとき、 F の分布関数は

$$F(x) = \Pr(F \leq x) = \Pr\left(\frac{X_1}{X_2} \leq \frac{n_1}{n_2} x\right)$$

です。 $v = (n_1/n_2)x$ とおくと、 F 分布の確率密度関数は、商の確率密度関数を与える (5.8) 式より、

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{n_1}{n_2} \int_0^\infty \frac{1}{2^{\frac{n_2}{2}} \Gamma(\frac{n_2}{2})} y^{\frac{n_2}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} \times y \frac{1}{2^{\frac{n_1}{2}} \Gamma(\frac{n_1}{2})} (vy)^{\frac{n_1}{2}-1} e^{-\frac{vy}{2}} dy \\
 &= \frac{n_1}{n_2} \frac{1}{\Gamma(\frac{n_1}{2}) \Gamma(\frac{n_2}{2}) 2^{\frac{n_1+n_2}{2}}} v^{\frac{n_2}{2}-1} \int_0^\infty y^{\frac{n_1+n_2}{2}-1} e^{-(v+1)\frac{y}{2}} dy \\
 &= \frac{n_1}{n_2} \frac{\Gamma(\frac{n_1+n_2}{2})}{\Gamma(\frac{n_1}{2}) \Gamma(\frac{n_2}{2})} \frac{v^{\frac{n_1}{2}-1}}{(v+1)^{\frac{n_1+n_2}{2}}} \\
 &= \frac{n_1}{n_2} \frac{\Gamma(\frac{n_1+n_2}{2})}{\Gamma(\frac{n_1}{2}) \Gamma(\frac{n_2}{2})} \frac{(\frac{n_1}{n_2}x)^{\frac{n_1}{2}-1}}{(\frac{n_1}{n_2}x+1)^{\frac{n_1+n_2}{2}}} \\
 &= \frac{\Gamma(\frac{n_1+n_2}{2}) n_1^{\frac{n_1}{2}} n_2^{\frac{n_2}{2}}}{\Gamma(\frac{n_1}{2}) \Gamma(\frac{n_2}{2})} \frac{x^{\frac{n_1}{2}-1}}{(n_1x+n_2)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}
 \end{aligned}$$

解 8.4. $n = 1$ のとき、確率密度関数は

$$f(t) = \frac{\Gamma(1)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{2})} (1+t^2)^{-1} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2}$$

となります。このとき、

$$E(T) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|t|}{1+t^2} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{t}{1+t^2} dt = \frac{1}{\pi} [\log |1+t^2|]_0^{\infty} = \infty$$

となり、期待値は存在しません。

解 8.5. $n = 2$ のとき、確率密度関数は

$$f(t) = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\sqrt{2\pi} \Gamma(1)} (1 + \frac{t^2}{2})^{-\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} (1 + \frac{t^2}{2})^{-\frac{3}{2}}$$

となります。このとき、

$$\frac{\sqrt{2}}{4} \int_{-\infty}^{\infty} |t| (1 + \frac{t^2}{2})^{-\frac{3}{2}} dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{\infty} (1+u)^{-\frac{3}{2}} du = \sqrt{2} < \infty$$

より、期待値は存在します。 $f(t)$ は偶関数なので、 $E(T) = 0$ です。

解 8.6. 自由度 ϕ の t 分布に従う確率変数は、標準正規分布に従う確率変数 X と自由度 ϕ の χ^2 分布に従う確率変数より、

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/\phi}}$$

と表されます。このとき、

$$T^2 = \frac{X^2}{Y/\phi} = \frac{X^2/1}{Y/\phi}$$

となり、 X^2 は自由度 1 の χ^2 分布に従うことから、 T^2 は自由度 $(1, \phi)$ の F 分布に従うことがわかります。

解 8.7. $\Gamma(n) = (n-1)! = \sqrt{2\pi}(n-1)^{n-\frac{1}{2}}e^{-(n-1)}$ を t 分布の確率密度関数に代入して

$$f(t) = \frac{\sqrt{2\pi}\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}e^{-(\frac{n-1}{2})}}{\sqrt{n\pi}\sqrt{2\pi}\left(\frac{n}{2}-1\right)^{\frac{n-1}{2}}e^{-(\frac{n}{2}-1)}} \times \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

となります。ここで、左側は

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{e\pi}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}\left(\frac{n}{2}-1\right)^{\frac{n-1}{2}}} &= \frac{1}{\sqrt{2e\pi}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-2}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{n-2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2e\pi}} e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

右側は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

となるので、 $n \rightarrow \infty$ のとき

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

これは標準正規分布の確率密度関数です。

解 8.8. 自由度 n_1 の χ^2 分布に従う確率変数 X_1 と自由度 n_2 の χ^2 分布に従う確率変数 X_2 が互いに独立のとき、

$$F = \frac{X_1/n_1}{X_2/n_2}$$

が自由度 (n_1, n_2) の F 分布に従うので、上側 α 点は $\Pr(F > k) = \alpha$ となる k であり、これを $F(n_1, n_2; \alpha)$ とします。 F の逆数をとると、

$$\frac{1}{F} = \frac{X_2/n_2}{X_1/n_1}$$

は自由度 (n_2, n_1) の F 分布に従います。このとき、

$$\Pr\left(\frac{1}{F} < \frac{1}{k}\right) = \alpha$$

となりますから、自由度 (n_2, n_1) の F 分布の下側 α 点は $1/k$ となります。したがって、

$$F(n_2, n_1; 1 - \alpha) = \frac{1}{F(n_1, n_2; \alpha)}$$

となります。

解 8.9. $\Pr(|Z| < k) = 0.90$ となるのは、 $k = 1.645$ のときですから、

$$\frac{0.1}{0.2/\sqrt{n}} < 1.645$$

となればよいので、 $\sqrt{n} > 3.29$ すなわち $n > 10.8$ より、11 以上のサンプルが必要になります。

第9章

解 9.1. (1) 10 回とも外れる確率は $0.8^{10} = 0.107$ であり、有意水準より大きいので、有意とはなりません。したがって、当選確率が 20% より低いとはいえません。

(2) n 回とも外れる確率 0.8^n が 0.05 以下となるのは、 $0.8^n < 0.05$ のときですから、 $n \log 0.8 < \log 0.05$ 、すなわち、 $n > 13.4$ となります。したがって、14 回以上あたりが出なければ当選確率は 20% より低いといえます。

(3) 当選確率が 15% のとき、14 回以上あたりが出ない確率は、 $0.85^{14} = 0.103$ です。20% より低いと検出できる検出力は 10.3% です。

解 9.2. 対数尤度関数

$$L(\lambda) = -n \log \lambda - \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{\lambda}$$

を λ で微分して、

$$-\frac{n}{\lambda} + \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{\lambda^2} = 0$$

より、最尤推定量は

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = \bar{x}$$

となります。標本平均が最尤推定量ですから、不偏性と一致性を満たしています。指数分布の母数に対するクラメル・ラオの下限を求めると、

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \log f(x; \lambda) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ -\log \lambda - \frac{x}{\lambda} \right\} = -\frac{1}{\lambda} + \frac{x}{\lambda^2} = \frac{x - \lambda}{\lambda^2}$$

となり、

$$\sigma_0^2 = \frac{\lambda^4}{nE[(x-\lambda)^2]} = \frac{\lambda^4}{n\lambda^2} = \frac{\lambda^2}{n}$$

が得られます。最尤推定量の分散は

$$V(\hat{\lambda}) = V(\bar{x}) = \frac{\lambda^2}{n}$$

ですから、クラメル・ラオの下限と一致します。したがって、有効性も満たしています。

解 9.3. 対数尤度関数

$$L(\theta) = n \log \theta + (\theta - 1) \sum_{k=1}^n \log x_k$$

を θ で微分して

$$\frac{n}{\theta} + \sum_{k=1}^n \log x_k = 0$$

より、最尤推定量は

$$\hat{\theta} = -\frac{n}{\sum_{k=1}^n \log x_k}$$

となります。 $Y = \log X$ の分布を考えると、 $F_X(x) = x^\theta$ より、 $F_Y(y) = \Pr(\log X \leq y) = \Pr(X \leq e^y) = e^{\theta y}$ となるので、 Y の確率密度関数は $f_Y(y) = \theta e^{\theta y}$ となり、 $\log X$ の期待値は

$$E(Y) = \theta \int_{-\infty}^0 y e^{\theta y} dy = -\frac{1}{\theta}$$

となります。したがって、

$$E\left[\frac{1}{\hat{\theta}}\right] = -\frac{1}{n}nE[Y] = \frac{1}{\theta}$$

となりますが、

$$E\left[\frac{1}{\hat{\theta}}\right] \neq \frac{1}{E[\hat{\theta}]}$$

ですから、不偏性はありません。

解 9.4. 一様分布 $U(0, \theta)$ に従う確率変数の期待値は $\theta/2$ 、分散は $\theta^2/12$ です。

(1) 期待値は

$$E(Y_1) = E(\bar{x}) = \theta/2$$

より、 $a_1 = 2$ です。このときの分散は

$$V(2Y_1) = 4V(\bar{x}) = \frac{4}{12n}\theta^2 = \frac{1}{3n}\theta^2$$

(2) 期待値は

$$E(Y_2) = E(\max(x_i)) = \frac{n}{n+1}\theta$$

より、 $a_2 = (n+1)/n$ です。このときの分散は

$$V\left(\frac{n+1}{n}Y_2\right) = \frac{(n+1)^2}{n^2} \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}\theta^2 = \frac{1}{n(n+2)}\theta^2$$

(3) 期待値は

$$E(Y_3) = E(\max(x_i)) + E(\min(x_i)) = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{n+1} = 1$$

より、 $a_3 = 1$ です。このときの分散は

$$V(Y_3) = \frac{2}{(n+1)(n+2)}\theta^2$$

第 10 章

解 10.1. (1) i. (仮説の設定) 右片側検定を行います。

帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$ ($\mu_0 = 39$), 対立仮説 $H_1 : \mu \geq \mu_0$

ii. (有意水準と検定統計量、棄却域の設定) t 統計量を用います。

有意水準 $\alpha = 0.05$

$$\text{検定統計量 } t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{V/n}}$$

$$\text{棄却域 } R : t_0 \geq t(n-1; 2\alpha) = t(8; 0.10) = 1.860$$

iii. (検定統計量の計算) 合計 $\sum x_i = 369$ と 2 乗和 $\sum x_i^2 = 15231$ を計算して、標本平均 $\bar{x} = 41.0$ 、平方和 $S = 102.0$ 、標本分散 $V = 12.75$ を求めます。

$$t_0 = \frac{41.0 - 39}{\sqrt{12.75/9}} = 1.680$$

iv. (判定) $t_0 = 1.680 < 1.860$ ですから、 t_0 は棄却域に入らず、帰無仮説は有意水準 5% で棄却されません。母平均は 39 より大きいとはいえません。 P 値は $\Pr(t > 1.680) = 6.6\%$ です。

(2) 点推定値は、 $\hat{\mu} = \bar{x} = 41.0$ です。信頼率 95% の信頼区間は

$$\bar{x} \pm t(n-1; \alpha) \sqrt{\frac{V}{n}} = 41.0 \pm 2.306 \sqrt{\frac{12.75}{9}} = 41.0 \pm 2.7 = 38.3, 43.7$$

(3) i. (仮説の設定) 左片側検定を行います。

帰無仮説 $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ ($\sigma_0^2 = 5^2$), 対立仮説 $H_1 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$

ii. (有意水準と検定統計量、棄却域の設定) χ^2 統計量を用います。

有意水準 $\alpha = 0.05$

$$\text{検定統計量 } \chi_0^2 = \frac{S}{\sigma_0^2}$$

$$\text{棄却域 } R: \chi_0^2 \leq \chi^2(n-1; 1-\alpha) = \chi^2(8; 0.95) = 2.73$$

iii. (検定統計量の計算) 平方和 $S = 102.0$ より

$$\chi_0^2 = \frac{102.0}{5^2} = 4.08$$

iv. (判定) $\chi_0^2 = 4.08 > 2.73$ ですから、 χ_0^2 は棄却域に入らず、帰無仮説は有意水準 5% で棄却されません。母分散は 5^2 より小さいといえませんが、 P 値は $\Pr(\chi^2 < 4.08) = 15.0\%$ です。

(4) 点推定値は、 $\hat{\sigma}^2 = 12.75$ です。信頼率 95% の信頼区間は

$$\begin{aligned} \frac{102.0}{\chi^2(8; 0.025)} &\leq \sigma^2 \leq \frac{102.0}{\chi^2(8; 0.975)} \\ \frac{102.0}{17.53} &\leq \sigma^2 \leq \frac{102.0}{2.179} \\ 5.82 &\leq \sigma^2 \leq 46.79 \end{aligned}$$

すなわち、 $2.4^2 \leq \sigma^2 \leq 6.8^2$ となります。

解 10.2. (1) (10.4) 式より

$$u(0.05) + u(0.10) = \frac{\mu - 39}{\sqrt{5^2/9}}$$

となることから、

$$\mu = 39 + (1.645 + 1.282) \times \frac{5}{3} = 43.88$$

となるので、母平均が 43.9 以上であれば、検出力 90% 以上で検出できます。

(2)

$$1 - \beta = \Pr\left(u > \frac{39 - 41}{5/3} + u(0.05)\right) = \Pr(u > 0.445) = 0.328$$

より、検出力は 33% です。

(3) (10.5) 式より

$$n = \frac{5^2}{(41 - 39)^2} (1.645 + 1.282)^2 = 53.5$$

すなわち 54 個以上のサンプルが必要です。

(4) $\sigma^2 = 3^2$ とすると

$$n = \frac{3^2}{(41 - 39)^2} (1.645 + 1.282)^2 = 19.3$$

となるので、サンプル数は 20 個でよいです。

第 11 章

解 11.1. $n_A = n_B = n$ とすると、 $S_A = (n-1)V_A$, $S_B = (n-1)V_B$ より、合併分散は

$$V = \frac{S_A + S_B}{n + n - 2} = \frac{1}{2} \left(\frac{S_A}{n-1} + \frac{S_B}{n-1} \right) = \frac{V_A + V_B}{2}$$

となります。このとき、(11.5) 式の分母は

$$V \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \right) = \frac{V_A + V_B}{n} = \frac{V_A}{n} + \frac{V_B}{n}$$

となり、(11.7) 式の分母と一致します。

解 11.2. (1) i. (仮説を立てる) 両側検定を行います。

$$\text{帰無仮説 } H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2, \quad \text{対立仮説 } H_1 : \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$$

ii. (有意水準と検定統計量、棄却域を定める) F 統計量を用います。

有意水準 $\alpha = 0.05$

$$\text{検定統計量 } F_0 = \frac{V_A}{V_B} \sim F(\phi_A, \phi_B)$$

$$\text{棄却域 } R : F_0 \geq F(\phi_A, \phi_B; \alpha/2) = F(9, 8; 0.025) = 4.357$$

$$F_0 \leq F(\phi_A, \phi_B; 1 - \alpha/2) = F(9, 8; 0.975) = 0.244$$

iii. (検定統計量を計算する) 合計 $\sum x_{Ai} = 38.4$, $\sum x_{Bi} = 31.5$ と
2 乗和 $\sum x_{Ai}^2 = 151.02$, $\sum x_{Bi}^2 = 111.25$ を計算して、平方和

$S_A = 3.564, S_B = 1.000$ と標本分散 $V_A = 0.396, V_B = 0.125$ を求めます。

$$F_0 = \frac{0.396}{0.125} = 3.168$$

- iv. (判定する) $F_0 = 3.168 < 4.357$ ですから、 F_0 は棄却域に入らず、帰無仮説は有意水準 5% で棄却されません。母分散 σ_A^2 と母分散 σ_B^2 は異なるとはいえません。 P 値は $2\Pr(F > 3.168) = 11.9\%$ です。
- (2) i. (仮説を立てる) 両側検定を行います。

帰無仮説 $H_0: \mu_A = \mu_B$, 対立仮説 $H_1: \mu_A \neq \mu_B$

- ii. (有意水準と検定統計量、棄却域を定める) データ数の比が 2 倍以内なので、 t 検定を適用します。

有意水準 $\alpha = 0.05$

$$\text{検定統計量 } t_0 = \frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{\sqrt{V \left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B} \right)}} \sim t(n_A + n_B - 2)$$

$$\text{棄却域 } R: |t_0| \leq t(n_A + n_B - 2; \alpha) = t(17; 0.05) = 2.110$$

- iii. (検定統計量を計算する) まず、合併分散を求めます。

$$V = \frac{S_A + S_B}{n_A + n_B - 2} = \frac{3.564 + 1.000}{10 + 9 - 2} = 0.2536$$

$$t_0 = \frac{3.84 - 3.50}{\sqrt{0.2536 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{9} \right)}} = 1.470$$

- iv. (判定する) $t_0 = 1.470 < 2.110$ ですから、 t_0 は棄却域に入らず、帰無仮説は有意水準 5% で棄却されません。母平均 μ_A と母平均 μ_B は異なるとはいえません。 P 値は $2\Pr(t > 3.168) = 39.4\%$ です。
- (3) 点推定値は

$$\widehat{\mu_A - \mu_B} = \bar{x}_A - \bar{x}_B = 3.84 - 3.50 = 0.34$$

です。信頼率 95% の信頼区間は

$$\begin{aligned}
 (\bar{x}_A - \bar{x}_B) \pm t(n_A + n_B - 2; \alpha) \sqrt{V \left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B} \right)} \\
 = 0.34 \pm 2.110 \sqrt{0.2536 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{9} \right)} \\
 = 0.34 \pm 0.49 = -0.15, 0.83
 \end{aligned}$$

解 11.3. 対応のあるデータですから、サンプルごとの差を計算すると、

$$0.0, 0.3, 0.3, -0.1, 0.6, 0.5, -0.3, 0.3, 0.7, 0.4$$

となります。

i. (仮説を立てる) 両側検定を行います。

$$\text{帰無仮説 } H_0 : \mu_d = 0, \quad \text{対立仮説 } H_1 : \mu_d \neq 0$$

ii. (有意水準と検定統計量、棄却域を定める) t 統計量を用います。

$$\text{有意水準 } \alpha = 0.05$$

$$\text{検定統計量 } t_0 = \frac{\bar{d}}{\sqrt{V_d/n}} \sim t(n-1)$$

$$\text{棄却域 } R : |t_0| \leq t(n-1; \alpha) = t(9; 0.05) = 2.262$$

iii. (検定統計量を計算する) データの差 d_i の合計 $\sum d_i = 2.7$ と 2 乗和 $\sum d_i^2 = 1.63$ から、平均 $\bar{d} = 0.27$ 、平方和 $S_d = 0.901$ と標本分散 $V_d = 0.1001$ を求めます。

$$t_0 = \frac{0.27}{\sqrt{0.1001/10}} = 2.699$$

iv. (判定する) $t_0 = 2.699 > 2.262$ ですから、 t_0 は棄却域に入り、帰無仮説は有意水準 5% で棄却されます。母平均 μ_A と母平均 μ_B に違いがあるといえます。 P 値は $2\Pr(t > 2.699) = 2.4\%$ です。

問 11.2 の結果と比較すると、母平均の差は小さいにもかかわらず、有意となりました。対応を取ることによってサンプル間のばらつきを排除しているためです。

第 12 章

解 12.1. 二項確率を計算する方法では、

$$\begin{aligned}\Pr(x \leq 2) &= {}_{100}C_0 0.03^0 0.97^{100} + {}_{100}C_1 0.03^1 0.97^{99} + {}_{100}C_2 0.03^2 0.97^{98} \\ &= 0.048 + 0.147 + 0.225 = 0.420\end{aligned}$$

F 分布による厳密法では、 $n_1 = 6, n_2 = 196$ より

$$\Pr(x \leq 2) = \Pr\left(F \geq \frac{196 \times 0.03}{6 \times 0.97}\right) = \Pr(F \geq 1.010) = 0.420$$

正規近似では、 $N(3, 2.97)$ に近似できるので、

$$\Pr(x \leq 2.5) = \Pr\left(u \leq \frac{2.5 - 3}{\sqrt{2.97}}\right) = \Pr(u \leq -0.293) = 0.385$$

ポアソン近似では、 $Po(3)$ に近似できるので、

$$\Pr(x \leq 2) = \left(\frac{3^0}{0!} + \frac{3^1}{1!} + \frac{3^2}{2!}\right) e^{-3} = 0.423$$

解 12.2. $n = 300, x = 4, P_0 = 0.03$ として計算します。

(1) i. (仮説を立てる) 左片側検定を行います。

帰無仮説 $H_0 : P = P_0$ ($P_0 = 0.03$)

対立仮説 $H_1 : P < P_0$

ii. (有意水準と検定統計量、棄却域を定める) u 統計量を用います。

有意水準 $\alpha = 0.05$

$$\text{検定統計量 } u_0 = \frac{p^* - P_0}{\sqrt{P_0(1 - P_0)/n}}$$

$$\text{棄却域 } R : u_0 \leq -u(\alpha) = -1.645$$

iii. (検定統計量を計算する) 修正比率 $p^* = (4+0.5)/(300+1) = 0.0150$ より、

$$u_0 = \frac{0.0150 - 0.03}{\sqrt{(0.03 \times 0.97)/300}} = -1.528$$

iv. (判定する) $u_0 = -1.528 > -1.645$ ですから、 u_0 は棄却域に入らず、帰無仮説は有意水準 5% で棄却されません。母不良率は 3% より小さいとはいえません。 P 値は $\Pr(u < -1.528) = 6.3\%$ です。

点推定値は

$$\hat{P} = p = \frac{x}{n} = \frac{4}{300} = 0.0133$$

です。信頼率 95% の信頼区間は

$$\begin{aligned} p^* \pm u(\alpha/2) \sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n}} &= 0.0150 \pm 1.960 \sqrt{\frac{0.0150 \times (1 - 0.0150)}{300}} \\ &= 0.0150 \pm 0.0137 = 0.0013, 0.0287 \end{aligned}$$

となり、0.1% ~ 2.9% となります。

(2) i. (仮説を立てる) 左片側検定を行います。

帰無仮説 $H_0 : P = P_0$ ($P_0 = 0.03$)

対立仮説 $H_1 : P < P_0$

ii. (有意水準と検定統計量、棄却域を定める) u 統計量を用います。

有意水準 $\alpha = 0.05$

$$\text{検定統計量 } u_0 = (L(p^*) - L(P_0)) \sqrt{n P_0(1 - P_0)}$$

$$\text{棄却域 } R : u_0 < -u(0.05) = -1.645$$

- iii. (検定統計量を計算する) ロジット $L(p^*) = \log \frac{0.0150}{1 - 0.0150} = -4.188$ 、 $P_0 = 0.03$ のロジット $L(P_0) = \log \frac{0.03}{1 - 0.03} = -3.476$ より、

$$u_0 = \{-4.188 - (-3.476)\} \sqrt{300 \times 0.03 \times (1 - 0.03)} = -2.103$$

- iv. (判定する) $u_0 = -2.103 < -1.645$ ですから、 u_0 は棄却域に入り、帰無仮説は有意水準 5% で棄却されます。母不良率は 3% より小さいといえます。 P 値は $\Pr(u < -2.103) = 1.8\%$ です。

点推定値は

$$\hat{P} = p = \frac{x}{n} = \frac{4}{300} = 0.0133$$

です。信頼率 95% の信頼区間は、まずロジットの信頼区間を求めると、

$$\begin{aligned} L(p^*) \pm \frac{u(\alpha/2)}{\sqrt{np^*(1-p^*)}} &= -4.188 \pm \frac{1.960}{\sqrt{300 \times 0.0150 \times (1 - 0.0150)}} \\ &= -4.188 \pm 0.932 = -5.120, -3.255 \end{aligned}$$

となります。これを逆変換すると

$$\frac{1}{1 + \exp(5.120)} = 0.0059, \frac{1}{1 + \exp(3.255)} = 0.0371$$

より、 P の信頼区間は、0.6% ~ 3.7% となります。

- (3) i. (仮説を立てる) 左片側検定を行います。

$$\text{帰無仮説 } H_0 : P = P_0 \ (P_0 = 0.03)$$

$$\text{対立仮説 } H_1 : P < P_0$$

- ii. (有意水準と検定統計量、棄却域を定める) $n = 300, k = 4, n_1 = 2(k + 1) = 10, n_2 = 2(n - k) = 592$ より

$$\text{有意水準 } \alpha = 0.05$$

$$\text{検定統計量 } F_0 = \frac{n_2 P_0}{n_1 (1 - P_0)}$$

$$\text{棄却域 } R : F_0 \geq F(n_1, n_2, 0.95) = F(10, 592; 0.95) = 1.847$$

iii. (検定統計量を計算する)

$$F_0 = \frac{592 \times 0.03}{10 \times 0.97} = 1.831$$

iv. (判定する) $F_0 = 1.831 < 1.847$ ですから、 F_0 は棄却域に入らず、帰無仮説は有意水準 5% で棄却されません。母不良率は 3% より小さいとはいえません。 P 値は $\Pr(F > 1.831) = 5.2\%$ です。

点推定値は

$$\hat{P} = p = \frac{x}{n} = \frac{4}{300} = 0.0133$$

です。信頼率 95% の信頼区間は、

$$P_L = \frac{8}{594 \times F(594, 8; 0.025) + 8} = 0.0036$$

$$P_U = \frac{10 \times F(10, 592; 0.025)}{592 + 10 \times F(10, 592; 0.025)} = 0.0338$$

です。したがって、信頼区間は 0.4% ~ 3.4% となります。

解 12.3. (1)

$$p^* = \frac{68.5}{601} = 0.114, L(p^*) = -2.051, L(0.10) = -2.197$$

より、帰無仮説のもとで

$$L(p^*) \sim N(-2.197, \frac{1}{600 \times 0.1 \times 0.9})$$

に従います。

$$u_0 = \sqrt{600 \times 0.10 \times 0.90} \times (-2.051 - (-2.197))$$

$$= 1.075 < u(0.05) = 1.645$$

より、帰無仮説は棄却されません。よって、10% より高いとはいえません。

(2) 先週のデータによると、

$$p_2^* = \frac{60.5}{601} = 0.101, L(p_2^*) = -2.190$$

であり、合併比率は

$$p^* = \frac{68 + 60 + 0.5}{600 + 600 + 1} = 0.107$$

となります。

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{0.114 - 0.101}{\sqrt{0.107 \times (1 - 0.107) \times \left(\frac{1}{600} + \frac{1}{600}\right)}} \\ &= 0.728 < u(0.05) = 1.645 \end{aligned}$$

より、帰無仮説は棄却されません。よって、先週より高くなったとはいえません。

(3) ロジットの信頼区間は

$$\begin{aligned} -2.051 \pm \frac{1.960}{\sqrt{600 \times 0.114 \times (1 - 0.114)}} &= -2.051 \pm 0.252 \\ &= -2.303, -1.799 \end{aligned}$$

です。これを逆変換して、信頼区間は 9.1% ~ 14.2% となります。

(4) 直接近似による信頼区間の幅が $\pm 1\%$ となるには

$$1.960 \sqrt{\frac{0.114 \times (1 - 0.114)}{n}} \leq 0.01$$

となればいいので、 $\sqrt{n} > 62.29$ より、 $n > 3880.1$ 、つまりおよそ 4000 世帯以上を調べなければなりません。

第 13 章

解 13.1.

$$F_0 = \frac{V_R}{V_E} = \frac{S_R/1}{S_E/(n-2)} = (n-2) \frac{S_R}{S_T - S_R}$$

ここで、 $S_R = S_{xy}^2/S_{xx}$, $S_T = S_{yy}$, $r = S_{xy}/\sqrt{S_{xx}S_{yy}}$ より

$$F_0 = (n-2) \frac{S_{xy}^2/S_{xx}}{S_{yy} - S_{xy}^2/S_{xx}} = (n-2) \frac{S_{xy}^2/S_{xx}S_{yy}}{1 - S_{xy}^2/S_{xx}S_{yy}} = \frac{r^2(n-2)}{1-r^2} = t_0^2$$

が得られます。自由度 $(1, \phi)$ の F 分布は自由度 ϕ の t 分布の 2 乗として表されることから、回帰分析における F_0 より無相関の検定における t_0 が導かれます。

解 13.2. 平均は $\bar{x} = 39.9$, $\bar{y} = 29.2$ より、平方和を計算すると、

$$S_{xx} = 50689 - 30 \times 39.9^2 = 2928.7$$

$$S_{yy} = 28544 - 30 \times 29.2^2 = 2964.8$$

$$S_{xy} = 33642 - 30 \times 39.9 \times 29.2 = -1310.4$$

です。試料相関係数は

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}} = \frac{-1310.4}{\sqrt{2928.7 \times 2964.8}} = -0.445$$

無相関の検定を行うとき、検定統計量は

$$t_0 = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{-0.445\sqrt{28}}{\sqrt{1-0.445^2}} = -2.629$$

となり、 $|t_0| = 2.629 > t(28; 0.05) = 2.048$ より、有意水準 5% で棄却されます。無相関ではないといえます。

点推定値は、 $\hat{\rho} = r = -0.445$ です。信頼率 95% の信頼区間は、まず z 変換の信頼区間を求めると、 $\tanh^{-1} r = -0.478$ より、

$$\zeta_L = -0.478 \pm \frac{1.960}{\sqrt{27}} = -0.478 \pm 0.377 = -0.855, -0.101$$

となります。これを逆変換すると

$$\begin{aligned}\rho_L &= \frac{e^{-0.855} - 1}{e^{-0.855} + 1} = -0.694 \\ \rho_U &= \frac{e^{-0.101} - 1}{e^{-0.101} + 1} = -0.101\end{aligned}$$

より、母相関係数の信頼区間は $-0.69 \sim -0.10$ となります。

解 13.3. 平均は $\bar{x} = 34, \bar{y} = 26$ より、平方和を計算すると、

$$\begin{aligned}S_{xx} &= 37736 - 30 \times 34^2 = 3056 \\ S_{yy} &= 22192 - 30 \times 26^2 = 1912 \\ S_{xy} &= 28872 - 30 \times 34 \times 26 = 2352\end{aligned}$$

です。母回帰係数の推定値は

$$\hat{\beta}_1 = \frac{2352}{3056} = 0.7696$$

回帰直線は

$$\mu = 26 + 0.7696(x - 34)$$

回帰変動の有意性を検定すると

$$\begin{aligned}S_T &= S_{yy} = 1912.0 \\ S_R &= \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}} = \frac{2352^2}{3056} = 1810.2 \\ S_e &= S_T - S_R = 1912.0 - 1810.2 = 101.8\end{aligned}$$

より、 $V_R = 1810.2$, $V_e = 101.8/28 = 3.64$ です。検定統計量は

$$F_0 = \frac{V_R}{V_e} = \frac{1810.2}{3.64} = 497.8$$

となり、回帰変動は有意となります。 $x = 40$ における母回帰は、点推定値は

$$\hat{\mu}_0 = 26.0 + 0.7696(40 - 34.0) = 30.6$$

です。信頼率 95% の信頼区間は

$$30.6 \pm t(28; 0.05) \sqrt{\left(\frac{1}{30} + \frac{(40 - 34.0)^2}{3056} \right) 3.64} = 30.6 \pm 0.8 = 29.8, 31.4$$

$x = 40$ におけるデータの予測は、点予測値は

$$\hat{x}_0 = 26.0 + 0.7696(40 - 34.0) = 30.6$$

です。信頼率 95% の予測区間は

$$30.6 \pm t(28; 0.05) \sqrt{\left(\frac{31}{30} + \frac{(40 - 34.0)^2}{3056} \right) 3.64} = 30.6 \pm 4.0 = 26.6, 34.6$$

となります。

第 14 章

解 14.1. 原点を中心として 1 辺の長さが 2 の立方体を考え、この立方体の内部の点を $(-1, 1)$ の一様乱数を 3 つ発生させて (u_1, u_2, u_3) と表します。求める立体に含まれる点は、 $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 < 1, u_1 < 1/2, u_2 < 1/2, u_3 < 1/2$ を満たします。乱数を n 組発生させて、この条件を満たす乱数の組の割合 r を求めます。立方体の体積は 8 ですから、 r を 8 倍すると求める立体の体積となります。以下に実行結果の例を示します。体積は、2.41 であることがわかります。

n	点推定値	信頼下限	信頼上限
10	2.4000	0.8783	5.1075
100	2.2400	1.6220	3.0237
1000	2.3360	2.1187	2.5694
10000	2.3816	2.3107	2.4541
100000	2.4062	2.3835	2.4290
1000000	2.4165	2.4093	2.4237
10000000	2.4108	2.4085	2.4130

解 14.2. 4 つの $(0, 1)$ の一様乱数 u_1, u_2, u_3, u_4 を発生させ、2 点を $(u_1, u_2), (u_3, u_4)$ と表すと、線分の長さは $d = \sqrt{(u_1 - u_3)^2 + (u_2 - u_4)^2}$ となります。乱数を n 組発生させて、線分の長さを計算し、その平均と標準偏差を求めます。以下に実行結果の例を示します。線分の長さの平均は 0.521、標準偏差は 0.248 であることがわかります。

n	平均		標準偏差	
	点推定値	信頼区間	点推定値	信頼区間
10	0.3645	0.1840 ~ 0.5450	0.2523	0.1735 ~ 0.4606
100	0.5497	0.5004 ~ 0.5989	0.2481	0.2179 ~ 0.2882
1000	0.5047	0.4896 ~ 0.5198	0.2434	0.2331 ~ 0.2545
10000	0.5175	0.5126 ~ 0.5223	0.2457	0.2424 ~ 0.2492
100000	0.5216	0.5201 ~ 0.5231	0.2478	0.2467 ~ 0.2489
1000000	0.5214	0.5210 ~ 0.5219	0.2479	0.2476 ~ 0.2482
10000000	0.5214	0.5214 ~ 0.5216	0.2479	0.2478 ~ 0.2480

解 14.3. 1 点を固定し、残りの 2 点の動径のなす角を α, β とすると、これらは $(0, 2\pi)$ の一様乱数で与えることができます。3 辺の長さは、

$$a = \sqrt{2(1 - \cos \alpha)}, b = \sqrt{2(1 - \cos \beta)}, c = \sqrt{2(1 - \cos(\alpha - \beta))}$$

となり、ヘロンの公式 $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, $s = (a+b+c)/2$ から面積を求めることができます。以下に実行結果の例を示します。面積の平均は 0.477、標準偏差は 0.383 であることがわかります。

n	平均		標準偏差	
	点推定値	信頼区間	点推定値	信頼区間
10	0.5300	0.1896 ~ 0.8704	0.4758	0.3273 ~ 0.8687
100	0.5172	0.4407 ~ 0.5938	0.3857	0.3386 ~ 0.4480
1000	0.5008	0.4765 ~ 0.5250	0.3909	0.3745 ~ 0.4088
10000	0.4785	0.4710 ~ 0.4860	0.3831	0.3779 ~ 0.3885
100000	0.4760	0.4737 ~ 0.4784	0.3833	0.3817 ~ 0.3850
1000000	0.4775	0.4767 ~ 0.4782	0.3836	0.3830 ~ 0.3841
10000000	0.4773	0.4770 ~ 0.4775	0.3834	0.3834 ~ 0.3836

解 14.4. $[0, 1]$ の一様乱数 u を発生させて、

$$f = \frac{\sin(2\pi u)}{(2\pi u)^2 + 1}$$

を計算します。これを n 回繰り返して、母分散が未知のときの母平均の推定を用いて f の平均を推測します。実行結果の例を示します。定積分の値は 0.0994 であることがわかります。

n	点推定値	信頼区間
10	0.07944	-0.05093 ~ 0.20982
100	0.08727	0.05711 ~ 0.11743
1000	0.09657	0.08642 ~ 0.10671
10000	0.10007	0.09685 ~ 0.10330
100000	0.09923	0.09821 ~ 0.10025
1000000	0.09932	0.09900 ~ 0.09964
10000000	0.09938	0.09928 ~ 0.09948
100000000	0.09942	0.09938 ~ 0.09945

解 14.5. $[0, 1]$ の 3 つの一様乱数 u_1, u_2, u_3 を発生させて、

$$f = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

を計算します。これを n 回繰り返して、母分散が未知のときの母平均の推定を用いて f の平均を推測します。実行結果の例を示します。重積分の値は 0.9606 であることがわかります。

n	点推定値	信頼区間
10	0.86353	0.68967 ~ 1.03739
100	0.94789	0.89109 ~ 1.00468
1000	0.97833	0.96127 ~ 0.99538
10000	0.96029	0.95482 ~ 0.96576
100000	0.96041	0.95869 ~ 0.96213
1000000	0.96079	0.96024 ~ 0.96133
10000000	0.96050	0.96032 ~ 0.96067
100000000	0.96064	0.96059 ~ 0.96070

第 15 章

解 15.1. 点推定値を $A_i B_j$ 水準の合計を x_{ij} とおくと

$$\begin{aligned}\hat{\mu}(A_i B_j) &= \bar{x}_{i.} + \bar{x}_{.j} - \bar{x} = \frac{1}{mr} \sum_{t=1}^m x_{it} + \frac{1}{lr} \sum_{s=1}^l x_{sj} - \frac{1}{lmr} \sum_{s=1}^l \sum_{t=1}^m x_{st} \\ &= \left(\frac{1}{mr} + \frac{1}{lr} - \frac{1}{lmr} \right) x_{ij} + \left(\frac{1}{mr} - \frac{1}{lmr} \right) \sum_{t=1, \neq j}^m x_{it} \\ &\quad + \left(\frac{1}{lr} - \frac{1}{lmr} \right) \sum_{s=1, \neq i}^l x_{sj} - \frac{1}{lmr} \sum_{s=1, \neq i}^l \sum_{t=1, \neq j}^m x_{st}\end{aligned}$$

となります。 x_{ij} の分散は $r\sigma^2$ ですから、点推定値の分散は

$$\begin{aligned}V(\hat{\mu}(A_i B_j)) &= \left(\frac{1}{mr} + \frac{1}{lr} - \frac{1}{lmr} \right)^2 r\sigma^2 + \left(\frac{1}{mr} - \frac{1}{lmr} \right)^2 (m-1)r\sigma^2 \\ &\quad + \left(\frac{1}{lr} - \frac{1}{lmr} \right)^2 (l-1)r\sigma^2 + \left(\frac{1}{lmr} \right)^2 (l-1)(m-1)r\sigma^2 \\ &= \frac{l+m-1}{lmr} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n_e}\end{aligned}$$

となり、有効繰返し数が導出されます。

解 15.2. 平方和を求めます。

$$\begin{aligned}
 S_T &= 15383.84 - \frac{540.6^2}{19} = 2.347 \\
 S_A &= \frac{141.8^2}{5} + \frac{143.9^2}{5} + \frac{112.6^2}{4} + \frac{142.3^2}{5} - \frac{540.6^2}{19} = 0.945 \\
 S_E &= S_T - S_A = 2.347 - 0.945 = 1.402
 \end{aligned}$$

各平方和の自由度は、 $\phi_T = 19 - 1 = 18$, $\phi_A = 4 - 1 = 3$, $\phi_E = 18 - 3 = 15$ です。平均平方や検定統計量 F_0 を分散分析表にまとめます。

要因	平方和	自由度	平均平方	F_0
A	0.945	3	0.315	3.37
E	1.402	15	0.0935	
T	2.347	18		

$F_0 > F(3, 15; 0.05) = 3.29$ より要因効果は有意となります。したがって、因子 A は特性に影響を与えているといえます。ちなみに、 P 値は $\Pr(F > 3.37) = 4.7\%$ です。

最も特性が高くなるのは水準 A_2 のときです。このときの特性の母平均の点推定値は

$$\mu(A_2) = \bar{x}_2 = \frac{143.9}{5} = 28.78$$

です。区間推定は

$$\begin{aligned}
 \bar{x}_2 \pm t(15; 0.05) \sqrt{\frac{V_E}{r_2}} &= 28.78 \pm 2.131 \sqrt{\frac{0.0935}{5}} \\
 &= 28.78 \pm 0.29 = 28.49, 29.07
 \end{aligned}$$

より、28.49 ~ 29.07 となります。

解 15.3. まず、各水準組合せでの合計を求めておきます。これより水準 $A_1 B_2$ で最大となっていることがわかります。

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	53.6	57.5	51.4	55.9
A_2	56.6	55.7	55.0	54.3
A_3	50.0	55.4	54.4	53.0

平方和を求めます。

$$\begin{aligned}
 S_T &= 17787.56 - \frac{652.8^2}{24} = 31.40 \\
 S_A &= \frac{218.4^2}{8} + \frac{221.6^2}{8} + \frac{212.8^2}{8} - \frac{652.8^2}{24} = 4.96 \\
 S_B &= \frac{160.2^2}{6} + \frac{168.6^2}{6} + \frac{160.8^2}{6} + \frac{163.2^2}{6} - \frac{652.8^2}{24} = 7.32 \\
 S_{AB} &= \frac{53.6^2}{2} + \frac{57.5^2}{2} + \frac{51.4^2}{2} + \frac{55.9}{2} + \frac{56.6}{2} + \frac{55.7^2}{2} + \frac{55.0^2}{2} \\
 &\quad + \frac{54.3^2}{2} + \frac{50.0^2}{2} + \frac{55.4}{2} + \frac{54.4}{2} + \frac{53.0^2}{2} - \frac{652.8^2}{24} = 25.36 \\
 S_{A \times B} &= S_{AB} - S_A - S_B = 25.36 - 4.96 - 7.32 = 13.08 \\
 S_E &= S_T - S_{AB} = 31.40 - 25.36 = 6.04
 \end{aligned}$$

各平方和の自由度は、 $\phi_T = 24 - 1 = 23$, $\phi_A = 3 - 1 = 2$, $\phi_B = 4 - 1 = 3$, $\phi_{A \times B} = 2 \times 3 = 6$, $\phi_E = 23 - 2 - 3 - 6 = 12$ です。平均平方や検定統計量 F_0 を分散分析表にまとめます。

要因	平方和	自由度	平均平方	F_0	P 値
A	4.96	2	2.48	4.93	2.7%
B	7.32	3	2.44	4.85	2.0%
$A \times B$	13.08	6	2.18	4.33	1.5%
E	6.04	12	0.503		
T	31.40	23			

主効果 A, B と交互作用 $A \times B$ が有意となりました。最も高くなるのは、 AB の水準組合せで最大となる水準 A_1B_2 のときです。このときの点推定

値は

$$\mu(A_1B_2) = \bar{x}_{12} = \frac{57.5}{2} = 28.75$$

です。信頼率 95% の信頼区間は

$$\begin{aligned}\bar{x}_{12} \pm t(12; 0.05) \sqrt{\frac{V_E}{r}} &= 28.75 \pm 2.069 \sqrt{\frac{0.503}{2}} \\ &= 28.75 \pm 1.04 = 27.71, 29.79\end{aligned}$$

より、27.71 ～ 29.79 となります。