

## 〈本書を手にとってくれた大学生のみなさんに〉

本書は、いわゆる理工系の大学生が初年次で習得すべき必須の数学である微積分を、数学で一番大切な《心》が伝わるように現代的なタッチで叙述した新しい微積分読本です。限られた時間で実施される教室での講義を敷衍したり要約したりする従来の書籍と違って、あなたがこれを読むことで、微積分の面白さや難しさ、言い換えると理論的なポイントを把握できるように、それによって、微積分をより深く理解しようという気持ちになれるように、自習支援型という新しいタイプの教科書を目指しました。

本書は、あなたが入学した大学の教室で受ける講義とぴったりと対応するとは限りませんが、講義に出席していながら、そこで何が問題にされているのかさっぱり得心が行かないという、多くの若い学生諸君の悩みに対して、その悩みに寄り添い、やがて納得の喜びへと導く学習のヒントを与えてくれるものでありたい、というのが著者の願いです。本書の最小単位となる章を1つでもしっかり通して読んでいただければ、講義の際に失敗した理解をリカバーし、次の講義にはより能動的に参加することができるようになりますと期待しています。数学においては、理解を阻む難攻不落の厚い壁を突破するために、急所を把握することが大切ですが、それは根気よく考え続けた末に来るものであること、したがってまた、数学においても読書型の勉強の醍醐味があることを知っていただきたいのです。

次に、本書のもう1つの特徴である演習問題について述べさせていただきます。微積分に限らず、数学の理解には問題演習が大切です。それは、反復練習による基本の習得が学習の基本であるというだけでなく、試行錯誤を含め自分なりに問題の解を探求し発見するという能動的な体験を通じてこそ、数学的な理解が喜びを伴って深化するからです。

この趣旨から、本書では、従来の微積分の教科書とは少し違って、いろいろな性格の演習問題を、**Basic Standard Advanced**という3つのグループに分けて用意しました。これらの演習問題は、けっして若い読者に学習の忍耐を教えるための苦役ではありません。むしろ、ともすれば計算 (calculation) に傾きがちな微積分 (calculus) の学習において、納得し理解する喜びと、

能動的・挑戦的な思索の舞台を提供したいと願い、そのために本当に重要な数学的核心を突く問題を精選したつもりです。みなさんの時間の許す範囲で楽しんでください。通常は、**Basic** と **Standard** のレベルを目標にするとよいでしょう。解答に高速に接近しようとするよりも、時間をかけて、より深い理解へと進んでいただければと思います。なお、数学的内容の特質から、演習問題のレベル分けが重要でないと思われる章については演習問題のレベル分けがありません。敢えてレベルを指定するとすれば、他の標準的な章の **Advanced** に相当するものが中心になっています。

本書だけの特徴ではありませんが、数学の本には、記述の順序と簡潔さのために、読者の理解の困難をあえて無視するかのように発展的な記述が登場する箇所がいくつかあります。しかし、本書ではそういう箇所には「後で振り返ればよい」という趣旨の印「♣」がつけてありますので、みなさんの時間と気持ちの余裕に応じて読んでください。数学の勉強はできるだけ早く全体的な姿を把握することが大切ですから、特に初読の際にはそういう箇所を飛ばしても構いません。

本書の執筆は、長岡が企画とサンプルを作り、その基本コンセプトに賛同した渡辺と矢崎が協働してコンセプトを詳細化した全体的な原案を提供し、繰り返し3人で原稿を精査・推敲するという協同作業でなされました。途中から宮部が参加し、演習問題とその解答を充実させる仕事を担当しました。

本書を通じて、皆さんの現代数学への最初の一步が、確かな自信と深い感動に満ちたものとなることを祈っています。

2016年10月

著者を代表して 長岡亮介

## 〈教員と一般読者のみなさんに〉

現代の微積分の教科書は、大別すると、

- 実数や極限についての厳密な定義から始め、論理的に緻密な体系の組み立てを通じて、応用上重要な定理の厳密な証明へと至るもの（伝統的な本格書であるが、近頃の風潮では謙虚な初学者には“あまりに深遠”，傲慢な初学者には“まるで意味不明”と映ることが避けられない）
- 厳密な理論の緻密な構成には多少目を瞑<sup>つぶ</sup>ってでも、大学で必須の微積分の計算技術・論証技法の修得と応用の理解へと急ぐもの（演習書ないし微積分法の実用書）

の2種類である。この他に、ごく近年の国際的な傾向であるが、

高校では学ばない数学の話題のうちで、高校の知識の延長上でも、なんとか理解できる主題を上手に選び、論述の運びの工夫で、大学の本格的な数学に読者ができるだけ自然な流れで入っていけるようにしたもの

という、微積分教育の新しい流れを目指すものを見掛けるようになってきた。このような試みは、伝統的規範に代わる新しい規範の提案という挑戦であるから、伝統書と比べるとまだ決定版を得るには至っていないことは止むを得ない。本書もまさにそのような試みの1つである。

このような立場に立った書籍を用意しなければならないと奮い立ったのには、いくつかの理由がある。まず第一に、「自ら勉強に向かおうとしない」と批判されることの多い若者たちが、講義や試験に対しては一つ前の世代と比べるとよほど「勤勉」「真面目」であるということである。大学に入る前に身につけてしまった、数学的理解や数学の学習に関する《大きな勘違い》を背負ったまま大学に入学してきて、入学後もその誤解が解けないのであろうか、内容理解を伴わない「問題解法の手順」の形式的な丸暗記に多くの学習時間を費やし、結果として、学生という特権的な身分を与えられながら、大学の数学を理解する絶好の機会から疎外され、数学の魅力の一端にすら触

れずに大学を卒業してしまう人が少なくない。

したがって、高校までに染み付いた数学の学習についての頑固な先入観を克服して貰うために、高校数学との断絶を明確にするとともに、高校数学との継続性にも光を当てて、若い学生諸君の歪んだ数学観からの覚醒と自立を促す必要がある。

ここに本書の第二の動機がある。すなわち、高校数学の微積分法と大学数学の微積分学との断絶の構造的問題である。

現代の微積分のほとんどの教科書には、最初に「極限」の章がある。しかし、高校で学んだ極限の概念は、「限りなく近付く」という表現に象徴されるように運動の直観に依拠してすませているために、極限に関する基本的な定理、たとえば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta \quad \implies \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$$

のようなものですら、証明が与えられていない。また、高校数学には、「中間値の定理」や「平均値の定理」のような、高級な定理が登場しているが、その証明は扱われていない。それは、省かれているのではなく、証明する術がない、ということであるのだ。「数学は証明する学問である」と謳うなら、「ただし、数学から微積分は除く」といわなければならないことになってしまう（実は除かなければならないのは、微積分だけではない！）。これらの基本的な定理を厳密に証明するために、極限についての巧妙な論法と実数概念の定義が19世紀に確立され、微積分法から発展した解析学は、今日、現代数学の大きな柱の1つになっている。このような現代数学の高みは、数学の最も大きな魅力の1つである。

基礎概念の定義を欠いているという高校数学の決定的な欠点をきちんと克服しようとするれば、基礎概念の定義から再出発しなければならない。しかし、欠点を欠点として自覚していない若い読者に対し、いきなりその克服のための《厳密な論理の刀》を振りかざしても、切り味の鋭さに感動してもらう前に、刃の恐ろしさにおびえさせてしまうだけで終わりかねない。最近の若者はそれぐらい純朴で初々しい。これが今日の我が国の大学教育が直面している事態である。

実は、高校微積分法と大学微積分学の間にある学校数学と現代数学との間の絶対的ともいべき断絶は、18世紀の終わりから19世紀末にかけて起

こった数学におけるパラダイム・シフト（考え方の枠組みの革命的な変化）とでもいうべきものであるから、学生諸君がその気になって必死に頑張らない限り、単なる教育上の小さな工夫だけで、乗り越えることのできるものではない。

やや強引な言い方を許してもらえば、現代的な洗練を受ける以前の「古き良き時代」の数学は、多くの点で、「健全」な高校数学の世界に似ている。そこで我々は、現代数学の創世記ともいうべき「古き良き時代」の数学の偉大な先駆者たちに近い感覚で、微積分法の基本となる発想を述べ、その素朴な考えの破綻を明らかにした歴史的な出来事に対応する解説を通じて、論理的困難を克服するために編み出された数学の珠玉のアイデアを紹介するというようなスタイルで、微積分法を発見的に叙述することにした。このような歴史的展開を示すことを通して、現代の読者に、数学史上の大革命の疑似的な追体験してもらおうと思ったのである。これは「健全」な世界の中で永年に渡って生きてきた若い読者の素朴な世界観を尊重すると同時に、そのような世界から「解脱」する自発的な努力を、できる限り自然に促すことを目指すものであって、学習者の理解を無視して、論理的に洗練された厳密な叙述で自己満足すること、また、勉強に進んで向かおうとしない現代の若者におもねって、表面的にわかりやすい「丁寧な解説」で現代数学を理解する困難の回避を装うことの、いずれとも対極に位置するものである。

「古き良き時代」の数学が現代の数学教育に示唆するものが、もう1つある。それは、理論と応用が一体になっているということであり、ここに本書の第三の動機がある。ユーザーとして現代数学の諸道具を使いこなしたい人々ばかりでなく、純粋数学の修得を志す理学数物系の学生にとっても、数学を応用する経験は、同じく重要であるに違いない。高校数学的な健全な理解の怪しさと危なさに警告を発しながらも、厳密性・純粋性という偏屈な数学主義に陥らないように最大限の配慮を払って記述を進めるようにしたのは、使いこなすことの重要性への配慮に基づく。本書が、あえて極限や実数の話題から入らず、数学ユーザーにとって最も重要なべき級数から入ったのはその一例である。

「大学生の学力低下」を指摘する声は大きい。本書は、数学系の大学教員がこの事態をどう《変革》するか、という問題に対する1つの回答であり、壮大すぎるであろう夢を実現しようとする冒険である。現状を打開するため

に伝統や既成秩序に囚われない数学教育の変革への共感の輪が広がることを祈る。

「大切なのは、しかし、変革することである。」

## 謝辞

最後になりますが、カリキュラムに拘束されざるを得ない教育現場との整合性という教科書特有の深刻な問題に関する議論や、本書の性格にふさわしい各種演習問題のあり方についての検討などにおいて、微積分教育に深い関心を寄せる大学の同僚諸兄、とりわけ廣瀬宗光氏、下元数馬氏、小林徹平氏に、また、解答を含む原稿の推敲と膨大な数の図版の作成に関して献身的な協力をいただいた国本学園の山根匡史先生に深く感謝します。数学的核心的的確、適切に表現する魅力的な図版によって、理解しにくい部分を読み進める勇気が奮い起こされるはずです。また、明治大学理工学部で客員講師として講義いただいている早稲田大学の岩尾昌央先生には、格別の感謝を申し上げなければなりません。岩尾先生には、数学と教育の両視点から全体を通して極めて丁寧な査読をいただき、おかげで膨大な数の誤りを未然に防ぐことができたからです。

そして講談社サイエンティフィクの横山真吾氏には、著者が打ち出した新企画の構想の強すぎる個性を読者の立場から練り直す作業に際しての有益なアドバイスをいただきました。のみならず、執筆に必須の $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ と印刷の間にもいまお存在する大きな隔たりについての技術的なご支援、そしてまた講義で使用するための試作本の制作に関しても大変お世話になりました。末筆ながら、氏の献身的なご協力に感謝します。

2016年10月

著者を代表して 長岡亮介