第 1 章 解答

問 1–1

(1) $4-18\div(-3)^2=4-18\div 9=4-2=2$

(2) $3\div(16\div 2^3)^2=3\div(16\div 8)^2$
$=3\div 2^2=3\div 4=\frac{3}{4}$

(3) $2^2\times\{4^2\div 2+(54-5\times 3^2)\}$
$=4\times\{16\div 2+(54-5\times 9)\}$
$=4\times\{8+(54-45)\}=4\times(8+9)$
$=4\times 17=68$

問 1–2

(1) $\frac{20}{0.1}-\frac{10}{0.5}=200-20=180$

(2) $\frac{1}{0.01}\div\frac{1}{0.1}=\frac{1}{0.01}\times\frac{0.1}{1}=\frac{0.1\times 100}{0.01\times 100}=\frac{10}{1}=10$

(3) $\frac{3}{4}\div(1-0.75)=\frac{3}{4}\div 0.25=\frac{3}{4}\times\frac{1}{0.25}=\frac{3}{1}=3$

(4) $0.4\times\frac{3.6}{12}\times\frac{500}{25}\div 0.01$
$=0.4\times 0.3\times 20\div 0.01=2.4\div 0.01$
$=\frac{2.4}{0.01}=\frac{2.4\times 100}{0.01\times 100}=\frac{240}{1}=240$

問 1–3

(1) $\frac{6}{1+\frac{1}{\frac{1}{2}}}=\frac{6}{1+2}=\frac{6}{3}=2$

(2) $\frac{3}{5.5-\frac{1}{1-0.75}}=\frac{3}{5.5-4}=\frac{3}{1.5}=2$

(3) $2+\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{3}}}=2+\frac{1}{1-\frac{1}{\frac{2}{3}}}=2+\frac{1}{1-\frac{3}{2}}$
$=2+\frac{1}{-\frac{1}{2}}=2-2=0$

(4) $1-\frac{2}{2-\frac{2}{1-\frac{1}{x}}}=1-\frac{2}{2-\frac{2}{\frac{x-1}{x}}}=1-\frac{2}{2-\frac{2\times x}{\frac{x-1}{x}\times x}}$
$=1-\frac{2}{2-\frac{2x}{x-1}}=1-\frac{2(x-1)}{\left(2-\frac{2x}{x-1}\right)(x-1)}$
$=1-\frac{2(x-1)}{2(x-1)-2x}$
$=1-\frac{2(x-1)}{2x-2-2x}$
$=1-\frac{2(x-1)}{-2}=1+(x-1)=x$

(5) $1+\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{4}}}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{13}{4}}}=1+\frac{1}{2+\frac{4}{13}}=1+\frac{1}{\frac{26+4}{13}}$
$=1+\frac{1}{\frac{30}{13}}=1+\frac{13}{30}=\frac{30+13}{30}=\frac{43}{30}$

問 1–4

(1) 0.000308 g　　3 桁

(2) 51.050 mol　　5 桁

(3) 2.37×10^8 m　　3 桁

問 1–5

(1) $3.78+54.7+0.586=59.066=59.1$

(2) $5.065-3.2=1.865=1.9$

(3) $3.2\times 0.60=1.92=1.9$

(4) $148\times 7.6=1124.8=1100=1.1\times 10^3$

(5) $9.50\times 4000=38000=40000=4\times 10^4$

40000 の有効桁数は 1 桁です。

(6) $(3.40\times 10^{-3})\div(6.022\times 10^{23})$
$=\frac{3.40\times 10^{-3}}{6.022\times 10^{23}}=0.5645965\times 10^{-26}$
$=5.645965\times 10^{-27}=5.65\times 10^{-27}$

問 1–6

(1) 28 mg = 0.028 g

(2) 39 mL = 0.39 dL

(3) 583 mL = 5.83×10^{-1} L

(4) 23.5 pmol=2.35×10^{-11} mol

(5) 4.48×10^{-1} L= 448 mL

(6) 5784 μg= 0.005784 g (5.784×10^{-3} g)

問 1–7

(1) 0.015 (%) ⇨ 1.5 %

(2) 13.2%（小数） ⇨ 0.132

(3) 0.3 % (ppm) ⇨ 3000 ppm (3×10^3 ppm)

(4) 2356 ppb (ppm) ⇨ 2.356 ppm

問 1–8

(1) アンモニア水の NH_3 濃度は濃度が 28 %ですので、溶液（溶媒＋溶質）500 g 中に溶質（アンモニア）が 28 %含まれていることになります。

したがって、500 (g) × 0.28 = 140 g

(2) 溶液の体積 $=\frac{\text{溶液の質量(g)}}{\text{密度(g/mL)}}$から、

体積 $= \frac{100\ (\mathrm{g})}{0.90\ (\mathrm{g/mL})} = 111.1 \fallingdotseq 111\ \ \mathrm{mL}$

⑶ アンモニア水 1000 mL の質量は、

$1000\ (\mathrm{mL}) \times 0.90\ (\mathrm{g/mL}) = 900\ \ \mathrm{g}$

です。したがって、アンモニア水 1000 mL 中に含まれる NH_3 の質量は、

$900\ (\mathrm{g}) \times 0.28 = 252\ \ \mathrm{g}$

⑷ モル濃度は、

モル濃度 (mol/L)$= \frac{溶質\ (\mathrm{mol})}{溶液\ (\mathrm{L})}$ から、

モル濃度 (mol/L)$= \frac{\frac{252}{17.03}(\mathrm{mol})}{1\ (\mathrm{L})} = \frac{252}{17.03}$

$= 14.79742 \fallingdotseq 14.8\ \ \mathrm{mol/L}$

問 1–9

⑴ 原薬 10 g に乳糖 90 g を混ぜると全量は、

$10\ (\mathrm{g}) + 90\ (\mathrm{g}) = 100\ \ \mathrm{g}$ となります。

したがって、原薬の質量百分率は、

$\frac{10}{100} \times 100 = 10\ \ \%$

⑵ 40 wt%細粒製剤の成分含有量は、400 mg/g（40 wt%の製剤を 1 g 秤量したとき、成分は 0.4 g = 400 mg）です。

求める原薬量は、

$20\ (\mathrm{g}) \times 400\ (\mathrm{mg/g}) = 8000\ (\mathrm{mg}) = 8\ \ \mathrm{g}$

⑶ 10 wt%細粒製剤の成分含有量は、100 mg/g（10 wt%の製剤を 1 g 秤量したとき、成分は 0.1 g = 100 mg）です。

1 日の原薬量は、240 mg ですから、

製剤の秤量$= 0.24\ (\mathrm{g}) \times 100\ (\mathrm{mg/g})$

$= 2400\ (\mathrm{mg}) = 2.4\ (\mathrm{g})$（1 日量）

5 日分処方ですから、

全秤取量$2.4\ (\mathrm{g}) \times 5 = 12\ \ \mathrm{g}$

となります。

問 1–10

⑴ $(1+x)^n \fallingdotseq 1 + nx$から、

$\sqrt[3]{1.006} \fallingdotseq (1+0.006)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3} \cdot 0.006$

$= 1 + 0.002 = 1.002$

または、$(1+x)^n \fallingdotseq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$から、

$\sqrt[3]{1.006} \fallingdotseq 1 + \frac{1}{3} \cdot 0.006 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2} 0.006^2$

$= 1.002 + \frac{-\frac{2}{9}}{2} \cdot 0.000036$

$= 1.002 - \frac{0.000036}{9}$

$= 1.002 - 0.000004 = 1.001996$

実際の値は、1.001996 です。

⑵ $(1+x)^n \fallingdotseq 1 + nx$から、

$1.07^2 \fallingdotseq (1+0.07)^2 = 1 + 2 \cdot 0.07 = 1.14$

または、$(1+x)^n \fallingdotseq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$から、

$1.07^2 \fallingdotseq 1 + 2 \cdot 0.07 + \frac{2(2-1)}{2} 0.07^2$

$= 1.14 + 0.07^2 = 1.14 + 0.0049$

$= 1.1449$

実際の値は、1.1449 です。

⑶ $(a+x)^n \fallingdotseq a^n\left(1 + n\frac{x}{a}\right)$から、

$3.06^2 \fallingdotseq 3^2\left(1 + 2 \cdot \frac{0.06}{3}\right) = 9 \cdot (1 + 0.04)$

$= 9 \cdot 1.04 = 9.36$

実際の値は、9.3636 です。

⑷ $\frac{1}{1+x} \fallingdotseq 1 - x$から、

$\frac{1}{1.003} \fallingdotseq \frac{1}{1+0.003} = 1 - 0.003 = 0.997$

または、$\frac{1}{1+X} \fallingdotseq 1 - x + x^2$から、

$\frac{1}{1.003} \fallingdotseq 1 - 0.003 + 0.003^2$

$= 0.997 + 0.000009 = 0.997009$

実際の値は、0.997008973 です。

問 1–11

グルコース 54 g/dL は、100 mL の溶液中に 54 g のグルコースが溶けていることです。

1000 mL 中に直すと、540 g/L となります。

グルコース溶液のモル濃度は、

$\frac{溶液\ 1\mathrm{L}\ 中の溶質の質量\ (\mathrm{g/L})}{分子量\ (\mathrm{g/mol})} = \frac{540}{180.156}$

$= 2.99740\ \ \mathrm{mol/L}$

です。有効数字 3 桁ですので、

3.00 mol/L となります。

問 1–12

硫酸 1000 mL の質量は、体積 × 密度ですから、

硫酸 1000 mL の質量 $= 1000 \times 1.840$

$= 1840\ \ \mathrm{g}$

96 wt%濃硫酸 1840 g 中に含まれる硫酸の質量は、

$1840 \times 0.96 = 1766.4\ \ \mathrm{g}$

したがって、濃硫酸のモル濃度は、

$\dfrac{\text{溶液 1L 中の溶質の質量 (g/L)}}{\text{分子量 (g/mol)}} = \dfrac{1766.4}{98}$

$= 18.02449\ \ \mathrm{mol/L}$

です。6 倍希釈すると、

$18.02449 \cdot \frac{1}{6} = 3.00408\ \ \mathrm{mol/L}$

有効数字 3 桁ですので、

3.00 mol/L となります。

濃硫酸のモル濃度は、おおよそ 18 mol/L です。この値は覚えましょう。

問 1–13

A wt%の原薬を希釈して B wt%で Y mL の希釈薬を調製するとき、秤取する A wt%の原薬の量 X mL の計算式は、希釈前後で溶質の量は同じなので、次のようになります。

$$X \cdot \frac{A}{100} = Y \cdot \frac{B}{100}$$

この式を変形すると、

$$\text{必要原液}X = \text{作製量} \times \frac{\text{希釈後の濃度}}{\text{原液の濃度}} = Y \cdot \frac{B}{A}$$

となります。

10 wt%塩化ベンゼトニウム液から，0.05 wt%塩化ベンゼトニウム液を 1000 mL つくる場合、必要な 10 wt%塩化ベンゼトニウム液は、

$1000 \times \frac{0.05}{10} = 100 \times 0.05 = 5\ \ \mathrm{mL}$

問 1–14

$$\text{必要原液}X = \text{作製量} \times \frac{\text{希釈後の濃度}}{\text{原液の濃度}} = Y \cdot \frac{B}{A}$$

から、必要とする 10 wt%塩化ベンゼトニウムの量 X は、

$X = 2000 \cdot \frac{0.2}{5} = 80\ \ \mathrm{mL}$

問 1–15

注射薬のラベルに「20 mg/2 mL」と表示されていることから、総量 2 mL の液体の中に、フロセミドの成分が 20 mg 含まれていることがわかります。

指示がフロセミド 15 mg なので、フロセミドが 15 mg 含まれている薬液量を求めればよいことになります。必要な薬液量を X mL とすると、

$2 = X \cdot \frac{\mathbf{20}}{\mathbf{15}}$を変形して、

$X = 2 \cdot \frac{15}{20} = 1.5\ \ \mathrm{mL}$

となります。

別解

比例計算では、$20{:}15 = 2{:}X$となります。内項の積と外項の積は等しいことから、

$20X = 15 \cdot 2$

したがって、

必要な薬液量$X = \frac{15 \cdot 2}{20} = 1.5\ \ \mathrm{mL}$

問 1–16

20 %テオフィリンシロップ製剤のテオフィリン含有量（成分量）は、200 mg/g（20 %の製剤を 1 g 秤量したとき、成分は$0.2\ \mathrm{g} = 200\ \mathrm{mg}$）です。

製剤の秤量は、$200\ \mathrm{mg} \times \frac{1}{200\ \mathrm{mg/g}} = 1\ \mathrm{g}$（1 日量）です。

14 日分処方ですから、1 g × 14 日 =14 g（全量）

問 1–17

フロモックス小児用細粒 10 %製剤のフロモックス含有量（成分量）は、100 mg/g です。

製剤の秤量は、$150\ \mathrm{mg} \times \frac{1}{100\ \mathrm{mg/g}} = 1.5\ \mathrm{g}$（1 日量）です。

6 日分処方ですから、1.5 g × 6 日 =9 g（全量）

国試問題にチャレンジ

問 1–1

1. 誤り。k（キロ）は10^3の接頭辞ですから、$1\ \mathrm{kHz} = 1 \times 10^3\ \mathrm{Hz}$になります。

2. 正しい。n（ナノ）は10^{-9}の接頭辞ですから、

$1\ \mathrm{nm} = 1 \times 10^{-9}\ \mathrm{m}$になります。

3. 誤り。ppm は、試料中の物質の量を百万分の 1 (1×10^{-6}) で表示する単位です。%で表すには、$\times 100$となりますので、

$1\ \mathrm{ppm} = 1 \times 10^{-6} = 1 \times 10^{-4}\ \%$になります。

4. 誤り。µ（マイクロ）は10^{-6}の接頭辞ですから、

$1\ \mu\mathrm{g} = 1 \times 10^{-6}\ \mathrm{g}$になります。

5. 誤り。1 w/v%=1 g/100mL=10 g/L になります。

答え：2

問 1–2

1. 誤り。1 m は、1×10^{9} nm です。
2. 誤り。1 kg は、1×10^{9} µg です。
3. 誤り。1 mg/kg は、1 ppm です。1 kg= 1×10^{-6} mg です。ですから、1 mg は 1 kg の百万分の 1 です。
4. 正しい。1 %は、10000= 1×10^{4} ppm ですので、正しいです。
5. 誤り。1 nmol/100 mL を L に直すと、10 nmol/L です。したがって、1 nmol/100 mL は、1×10^{4} pmol/L です。

答え：4

問 1–3

$Pb(CH_3COO)_2$ は、

$\mathrm{Pb} + 4\mathrm{C} + 6\mathrm{H} + 4\mathrm{O}$からなるので、

原子量の合計

$= 207.2 + 12.0107 \cdot 4 + 1.0079 \cdot 6 + 15.9994 \cdot 4$

$= 207.2 + 48.0428 + 6.0474 + 63.9976$

$= 325.2878$

となります。有効数字 4 桁と考えて $Pb(CH_3COO)_2$ の式量は、325.3 です。

問 1–4

生理食塩水（0.9 % NaCl）500 mL に含まれる NaCl の質量を X (g) とすると、

$X = 0.9\ (\mathrm{g/100mL}) \times 500\ (\mathrm{mL}) = 4.5\ \mathrm{g}$

となります。

添加する 10 %NaCl 注射液の量を Y mL とすると、10 %NaCl 注射液に含まれる NaCl の質量は、$0.1Y$ (g) です。

500 mL の生理食塩液に、3 %になるように 10 % NaCl 注射液を添加します。

$\dfrac{\text{溶質の質量 (g)}}{\text{溶液の体積 (mL)}} = \dfrac{4.5 + 0.1\,Y}{500 + Y} = 0.03$

が成り立ちます。

変形して、

$(4.5 + 0.1Y) = 0.03 \cdot (500 + Y)$

$4.5 + 0.1Y = 15 + 0.03Y$

Y の式に変形して、

$0.1Y - 0.03Y = 15 - 4.5$

$0.7Y = 10.5$

$Y = 150\ \mathrm{mL}$

したがって、添加する 10 %NaCl 注射液の量は、150 mL

問 1–5

まず、70 vol%のエタノール 3 L を調製するために必要なエタノール量は、

$3\ \mathrm{L} \cdot 0.7 = 2.1\ \mathrm{L}$

必要とする 95 vol%のエタノール量を X L とすると、

$0.95 \times X = 2.1\ \mathrm{L}$

$X = \frac{2.1}{0.95} \fallingdotseq 2.210\ \mathrm{L}$

次に、クロルヘキシジンッグルコン酸塩の必要量を求めます。

クロルヘキシジングルコン酸塩を 0.2 w/v%含有する消毒薬を 3 L 調製するのに必要なクロルヘキシジングルコン酸塩量は、

$\frac{0.2}{100}\ (\mathrm{g/mL}) \cdot 3(\mathrm{mL}) = 6\ \mathrm{g}$

となります。

必要とする 5 w/v%クロルヘキシジンッグルコン酸塩溶液量を X (mL) とすると、

$\frac{5}{100}$ g /mL × X (mL) ＝ 6 g
$X = 6 \cdot \frac{100}{5} = 120$ mL
となります。問題文では mL で答えることになっていますので、
95 vol%のエタノールが 2210 mL と 5 w/v%クロルヘキシジンッグルコン酸塩溶液が 120 mL 必要となります。

問 1–6

問題文に、「1 アンプル 10 mL 中グルコン酸カルシウム水和物 850 mg 含む」とありますので、この注射液 10 mL に生理食塩水を加えて、全量 100 mL の輸液とするとき、1 mL 中のグルコン酸カルシウム水和物の量は、

$\frac{850\ (\mathrm{mg})}{100\ (\mathrm{mL})} = 0.008.5$ g/mL

となります。

1 mEq の定義は（原子量/原子価）から、グルコン酸カルシウム水和物を mEq に換算します。グルコン酸カルシウム水和物 1 mol 448.4 g は 1000 mEq です。しかし、Ca^{2+}は 2 価なので、1 mol は 2000 mEq に相当します。　輸液のカルシウム濃度を X (mEq/L) とすると、

$448.4 : 0.0085 = 2000 : X$

が成り立ちます。

$X = \frac{0.0085 \cdot 2000}{448.4} = \frac{17}{448.4} = 0.03791$

≒ 0.038 mEq/mL

別解

Ca^{2+}は 2 価なので、それを含むグルコン酸カルシウム水和物の原子量を定義に従い、

448.4÷2 から、224.2 g が 1000 mEq/mL ですから、

$224.2 : 0.0085 = 1000 : X$

が成り立ちます。

$X = \frac{0.0085 \cdot 1000}{224.3} = \frac{8.5}{224.2} = 0.03791$

≒ 0.038 mEq/mL

とすることもできます。

第 2 章 解答

問 2–1

(1) $\left(\frac{1}{100}\right)^0 = 1$

(2) $25^{-1} = \frac{1}{25} = 0.04$

(3) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{2} = 2.5$

(4) $\frac{1}{5^{-3}} = \frac{1}{\frac{1}{5^3}} = \frac{5^3}{1} = 125$

(5) $a^{-\frac{1}{2}} \times a^{\frac{2}{3}} = a^{-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}} = a^{-\frac{3}{6}+\frac{4}{6}} = a^{\frac{1}{6}}$

(6) $a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{4}{3}} \times a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{5}{3}} = a^{\frac{3}{2}} \times a^{-\frac{1}{2}} \times b^{\frac{4}{3}} \times b^{\frac{5}{3}}$

$= a^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} \times b^{\frac{4}{3}+\frac{5}{3}} = a^{\frac{2}{2}}b^{\frac{9}{3}} = ab^3$

問 2–2

(1) $\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{4 \times 16} = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$

(2) $\frac{\sqrt[4]{12}}{\sqrt[4]{4}} = \sqrt[4]{\frac{12}{4}} = \sqrt[4]{3}$

(3) $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

(4) $\sqrt{\sqrt[3]{49}} = \sqrt[3]{\sqrt{49}} = \sqrt[3]{7}$

問 2–3

(1) $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

(2) $\frac{-3}{\sqrt[4]{a^5}} = -3\frac{1}{\sqrt[4]{a^5}} = -3\frac{1}{a^{\frac{5}{4}}} = -3a^{-\frac{5}{4}}$

(3) $(\sqrt[4]{a})^{-3} = \left(a^{\frac{1}{4}}\right)^{-3} = a^{\frac{1}{4}\times(-3)} = a^{-\frac{3}{4}}$

(4) $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{a^{\frac{2}{3}}} = a^{-\frac{2}{3}}$

(5) $(\sqrt[4]{a})^5 = \left(a^{\frac{1}{4}}\right)^5 = a^{\frac{5}{4}}$

問 2–4

(1) $\frac{1}{\sqrt[3]{125^2}} = \frac{1}{125^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{(5^3)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{5^{3\times\frac{2}{3}}} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

(2) $\sqrt[4]{81^3} = 81^{\frac{3}{4}} = (3^4)^{\frac{3}{4}} = 3^{4\times\frac{3}{4}} = 3^3 = 27$

(3) $\sqrt[3]{\left(\frac{125}{64}\right)^{-2}} = \left(\frac{125}{64}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left\{\left(\frac{5}{4}\right)^3\right\}^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{5}{4}\right)^{3\times\left(-\frac{2}{3}\right)}$

$= \left(\frac{5}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$

(4) $\sqrt[4]{400}\sqrt[4]{0.25} = 400^{\frac{1}{4}} \times 0.25^{\frac{1}{4}}$

$= (400 \times 0.25)^{\frac{1}{4}} = 100^{\frac{1}{4}}$

$= (10^2)^{\frac{1}{4}} = 10^{2\times\frac{1}{4}} = 10^{\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{10}$

(5) $\frac{\sqrt[4]{0.8}}{\sqrt[4]{0.05}} = \sqrt[4]{\frac{0.8}{0.05}} = \sqrt[4]{16} = 16^{\frac{1}{4}} = (2^4)^{\frac{1}{4}}$

$= 2^{4\times\frac{1}{4}} = 2$

(6) $\dfrac{(\sqrt[3]{4})^5}{\sqrt[3]{64}} = \dfrac{4^{\frac{5}{3}}}{4} = 4^{\frac{5}{3}-1} = 4^{\frac{2}{3}} = (2^2)^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{4}{3}}$

$= 2^{1+\frac{1}{3}} = 2 \times 2^{\frac{1}{3}} = 2\sqrt[3]{2}$

問 2–5

(1) $\dfrac{10^{-4}}{0.02} = \dfrac{10^{-4}}{2\times10^{-2}} = \dfrac{1}{2} \times 10^{-4+2} = 0.5 \times 10^{-2}$

$= 5 \times 10^{-3}$

(2) $\dfrac{1}{5.0\times10^{-6}} = \dfrac{1}{5.0} \times 10^6 = 0.20 \times 10^6$

$= 2.0 \times 10^5$

(3) $\dfrac{2\times10^{-6}}{5000} = \dfrac{2\times10^{-6}}{5\times10^3} = \dfrac{2}{5} \times 10^{-6-3} = 0.4 \times 10^{-9}$

$= 4 \times 10^{-10}$

(4) $8.1 \times 10^{-4} + 0.5 \times 10^{-3}$

$= 0.81 \times 10^{-3} + 0.5 \times 10^{-3} = 1.31 \times 10^{-3}$

問 2–6

(1) $\sqrt{6} \times \sqrt[4]{54} \div \sqrt[4]{6}$

$= (2 \times 3)^{\frac{1}{2}} \times (2 \times 3^3)^{\frac{1}{4}} \div (2 \times 3)^{\frac{1}{4}}$

$= 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} \times 3^1 = 3\sqrt{2}$

(2) $\sqrt{e} \times \sqrt[6]{e} \div \sqrt[3]{e} = e^{\frac{1}{2}} \times e^{\frac{1}{6}} \div e^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{3}{6}+\frac{1}{6}-\frac{2}{6}}$

$= e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}$

(3) $\sqrt[3]{54} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{54 \times 2 \times 16}$

$= \sqrt[3]{1728} = 1728^{\frac{1}{3}} = (2^6 \times 3^3)^{\frac{1}{3}}$

$= 2^{6\times\frac{1}{3}} \times 3^{3\times\frac{1}{3}} = 2^2 \times 3 = 12$

(4) $\sqrt[3]{\sqrt{64}} \div \sqrt{16} \times \sqrt[3]{8} = (2^6)^{\frac{1}{6}} \div (2^4)^{\frac{1}{2}} \times (2^3)^{\frac{1}{3}}$

$= 2 \div 4 \times 2 = 1$

(5) $\sqrt[3]{243} \times \sqrt[6]{36} \div \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{3^5} \times \sqrt[6]{6^2} \div \sqrt[3]{2^4}$

$= 3^{\frac{5}{3}} \times 6^{\frac{1}{3}} \div 2^{\frac{4}{3}} = 3^{\frac{5}{3}} \times (2 \cdot 3)^{\frac{1}{3}} \div 2^{\frac{4}{3}}$

$= 3^{\frac{5}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}} \div 2^{\frac{4}{3}} = 3^{\frac{5}{3}+\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}-\frac{4}{3}} = \dfrac{9}{2}$

問 2–7

(1) $2^{-\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{5}{6}} \div 2^{\frac{1}{3}} = 2^{-\frac{1}{2}+\frac{5}{6}-\frac{1}{3}} = 2^{-\frac{3}{6}+\frac{5}{6}-\frac{2}{6}} = 2^0$

$= 1$

(2) $\left\{\left(\dfrac{16}{9}\right)^{-\frac{3}{4}}\right\}^{\frac{2}{3}} = \left(\dfrac{16}{9}\right)^{-\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}} = \left(\dfrac{16}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\dfrac{9}{16}\right)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{4}$

(3) $(4 \times 10^3) \times (2 \times 10^{-2}) \div (8 \times 10^{-5})$

$= \dfrac{4\times10^3\times2\times10^{-2}}{8\times10^{-5}} = 10^3 \times 10^{-2} \times 10^5$

$= 10^{3-2+5} = 10^6$

(4) $2.68 \times 10^{-23} \div (9.11 \times 10^{-28})$

$= \dfrac{2.68\times10^{-23}}{9.11\times10^{-28}} = \dfrac{2.68}{9.11} \times 10^{-23+28}$

$\fallingdotseq 0.294 \times 10^5 = 2.94 \times 10^4$

(5) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \div \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{5}{6}} = 2^{-\frac{1}{3}} \div 2^{-\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{5}{6}}$

$= 2^{-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{5}{6}} = 2^{-\frac{2}{6}+\frac{3}{6}+\frac{5}{6}} = 2$

問 2–8

(1) $0.5 = \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{10^{0.3010}} = 10^{-0.3010}$

(2) $0.8 = \dfrac{8}{10} = \dfrac{2^3}{10} = \dfrac{(10^{0.3010})^3}{10} = 10^{0.3010\times3-1}$

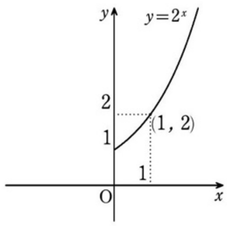
$= 10^{-0.0970}$

問 2–9

感染回数xと感染者数yの関係を表にすると、

x	0	1	2	3	4	…
$y = 2^x$	1	2	4	8	16	…

したがって、求める式は、$y = 2^x$ となります。



問 2–10

表を作成し、グラフを描きます。

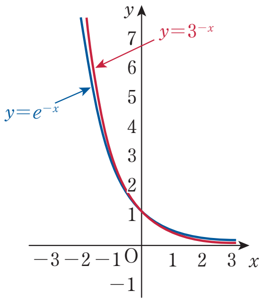
	…	−3	−2	−1	0	1	2	3	…
$y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$	…	27	9	3	1	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{9}$	$\dfrac{1}{27}$	…
$y = e^{-x}$	…	e^3	e^2	e	1	$\dfrac{1}{e}$	$\dfrac{1}{e^2}$	$\dfrac{1}{e^3}$	…

$2 < e < 3$ であることと表から、

$x < 0$ のとき、$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x < y = e^{-x} < y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

$0 < x$ のとき、$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x < y = e^{-x} < y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

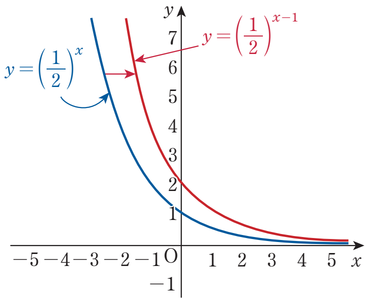
y 軸を境に大小関係が逆転することに注意



問 2–11

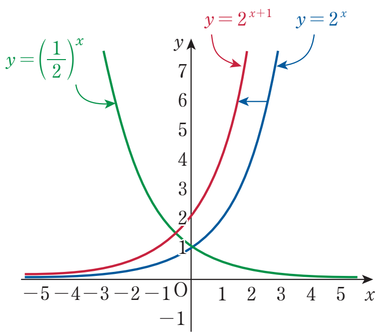
(1) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ のグラフを x 軸方向へ 1 だけ平行移動したグラフ



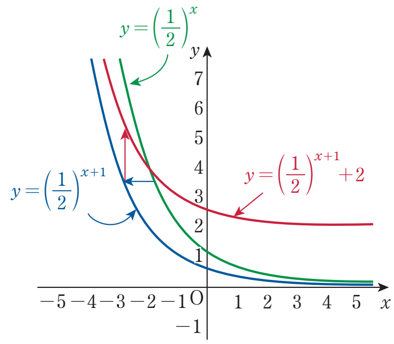
(2) $y=2^{x+1}$

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ のグラフを y 軸に関して対称移動した$y=2^x$ のグラフを、さらに x 軸方向へ-1 だけ平行移動したグラフ



(3) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}+2$

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ のグラフを x 軸方向へ-1 だけ平行移動した $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$ のグラフを、さらに y 軸方向へ 2 平行移動したグラフ



問 2–12

問題文の各数値を$h=\frac{2\gamma\cos\theta}{\rho g r}$に代入します。

$$h=\frac{2\cdot 482.1\times10^{-3}\cdot\cos 120^\circ}{13.53\times10^{3}\cdot 9.8\cdot 1\times10^{-3}}$$
$$=\frac{964.2\times10^{-3}\cdot(-0.5)}{132.6}=-\frac{482.1\times10^{-3}}{132.6}$$
$$\fallingdotseq -3.63575\times10^{-3}\ \mathrm{m}$$
$$=-0.363575\times10^{-2}\ \mathrm{m}$$
$$=-0.36\ \mathrm{cm}$$

答：約 0.36 cm 低下する

国試問題にチャレンジ

問 2–1

窒素分子の 1 個が占める専有面積が与えられているので、吸着している窒素分子数を求め、両者を掛ければ表面積が求められます。

この活性炭に吸着された窒素の個数は、

3.0×10^{-2} (mol) · 6.0×10^{23} (個/mol)

$=1.8\times10^{22}$ 個

表面積 $=1.8\times10^{22}\cdot1.6\times10^{-19}\ (\mathrm{m}^2)$

$=2.88\times10^{3}\ (\mathrm{m}^2)$

ただし、これは問題文から、2 g での値なので、求める比表面積は 1 g 相当ですから、

$2.88\times10^{3}\ (\mathrm{m}^2)\div2=1.44\times10^{3}\ \mathrm{m}^2/\mathrm{g}$となります。

有効桁数は、2 桁ですから、$1.4\times10^3 m^2/g$となります。

問 2–2

弱酸性化合物の溶解度は式が与えられていますので、それぞれ数値を代入すれば、pH を求められます。

問題文に「弱酸性化合物（pKa = 6.1）の水に対する溶解度は、pH=1 のとき 0.1 µg/mL であった」となっています。しかも、それはすべて分子形で存在していると考えられます。

したがって、Cs の分子形の溶解度は 0.1 µg/mL になります。

以上のことから、

$C_s=[\text{分子形の溶解度}]\cdot(1+10^{\mathrm{pH-p}Ka})$

に数値を代入して、

$1000\,(\mu\mathrm{g/mL})=0.1\,(\mu\mathrm{g/mL})\cdot(1+10^{\mathrm{pH}-6.1})$

となり、$1+10^{\mathrm{pH}-6.1}$の式に変形すると、

$$1+10^{\mathrm{pH}-6.1}=\frac{1000\ (\mu\mathrm{g/mL})}{0.1\ (\mu\mathrm{g/mL})}=10000$$
$$=1\times10^4$$

$10^{\mathrm{pH}-6.1}\fallingdotseq1\times10^4$

したがって、$\mathrm{pH}-6.1=4$

$\mathrm{pH}=4+6.1=10.1$

問 2–3

ダニエル電池の平衡定数$K_a=\exp\left\{\left(\frac{2F}{RT}\right)E^0\right\}$にそれぞれ数値を代入します。

$$K_a=\exp\left\{\left(\frac{2\cdot9.648\times10^4}{8.3144\cdot298.15}\right)\cdot1.10\right\}$$
$$=\exp\left(\frac{21.2256\times10^4}{2478.93836}\right)=e^{0.008562\times10^4}$$
$$=e^{85.62}$$

問題中に与えられている e^{40} と $e^{5.62}$ の値を利用する形に指数を変形すると、

$e^{40+40+5.62}=e^{40}\cdot e^{40}\cdot e^{5.62}$なります。$e^{40}$ と $e^{5.62}$ を代入すると、

$$K_a=2.354\times10^{17}\cdot2.354\times10^{17}\cdot275.90$$
$$=1528.85\times10^{34}\fallingdotseq1.53\times10^{37}$$

第 3 章 解答

問 3–1

(1) $\log_3 81=4$

(2) $\log_5 1=0$

(3) $\log_9 3=\frac{1}{2}$

(4) $\log_{10}\ 0.01=-2$

問 3–2

(1) $9^{\frac{1}{2}}=3$

(2) $5^{-3}=\frac{1}{125}$

(3) $5^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{5}$

(4) $4^{-\frac{3}{2}}=\sqrt{\frac{1}{64}}$

問 3–3

(1) $2^{\log_2 32}=32$

(2) $9^{\log_3 4}=3^{2\log_3 4}=3^{\log_3 4^2}=3^{\log_3 16}=16$

(3) $16^{\log_2\sqrt{0.1}}=2^{4\log_2\sqrt{0.1}}=2^{\log_2(\sqrt{0.1})^4}$
$=2^{\log_2 0.01}=0.01$

(4) $0.01^{\log_{10}5}=10^{-2\log_{10}5}$
$=10^{\log_{10}5^{-2}}=10^{\log_{10}\frac{1}{25}}=\frac{1}{25}$

(5) $2^{\log_{0.5}5}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\log_{0.5}5}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}5^{-1}}$
$=\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{5}}=\frac{1}{5}$

問 3–4

(1) $2\log_2 6+\log_2\frac{2}{9}=\log_2 6^2+\log_2\frac{2}{9}$
$=\log_2 36+\log_2\frac{2}{9}$
$=\log_2\left(36\times\frac{2}{9}\right)$
$=\log_2\ 8=\log_2\ 2^3=3$

(2) $4\log_2\ \sqrt{5}-\log_2\ 50=\log_2(\sqrt{5})^4-\log_2 50$
$=\log_2 25-\log_2 50$
$=\log_2\frac{25}{50}=\log_2\frac{1}{2}$
$=-1$

(3) $2\log_2\frac{2}{3}-\log_2\frac{8}{9}=\log_2\left(\frac{2}{3}\right)^2-\log_2\frac{8}{9}$
$=\log_2\frac{4}{9}-\log_2\frac{8}{9}$
$=\log_2\left(\frac{4}{9}\div\frac{8}{9}\right)$

$= \log_2 \frac{1}{2} = -1$

(4) $\log_2 \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{3}{2}\log_2 3 - \log_2 \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \log_2 \sqrt{2} - \log_2 3 + \frac{3}{2}\log_2 3 - (\log_2 \sqrt{3} - \log_2 2)$

$= \frac{1}{2}\log_2 2 - \log_2 3 + \frac{3}{2}\log_2 3 - \frac{1}{2}\log_2 3 + \log_2 2$

$= \frac{3}{2}$

(5) $\frac{1}{2}\log_3 \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\log_3 \sqrt[3]{12} + \log_3 \sqrt{8}$

$= \frac{1}{2}\log_3 \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}\log_3 12 + \frac{1}{2}\log_3 8$

$= \frac{1}{2}\log_3 \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log_3 12 + \frac{1}{2}\log_3 8$

$= \frac{1}{2}\left(\log_3 \frac{1}{2} - \log_3 12 + \log_3 8\right)$

$= \frac{1}{2}\log_3 \frac{8}{2\times 12} = \frac{1}{2}\log_3 \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$

問 3–5

(1) $\log_8 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 8} = \frac{\log_2 2^4}{\log_2 2^3} = \frac{4\log_2 2}{3\log_2 2} = \frac{4}{3}$

(2) $\log_{25} \sqrt{125} = \frac{\log_5 \sqrt{125}}{\log_5 25} = \frac{\frac{1}{2}\log_5 5^3}{2\log_5 5}$

$= \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4}$

(3) $\log_3 25 \cdot \log_5 9 = \log_3 5^2 \times \frac{\log_3 9}{\log_3 5}$

$= 2\log_3 5 \times \frac{\log_3 3^2}{\log_3 5}$

$= 2\log_3 5 \times \frac{2\log_3 3}{\log_3 5}$

$= 4$

(4) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 = \log_2 3 \times \frac{\log_2 4}{\log_2 3}$

$= \log_2 4 = \log_2 2^2$

$= 2$

(5) $\log_2 25 \cdot \log_3 16 \cdot \log_5 27$

$= \frac{\log_{10} 25}{\log_{10} 2} \times \frac{\log_{10} 16}{\log_{10} 3} \times \frac{\log_{10} 27}{\log_{10} 5}$

$= \frac{\log_{10} 5^2}{\log_{10} 2} \times \frac{\log_{10} 2^4}{\log_{10} 3} \times \frac{\log_{10} 3^3}{\log_{10} 5}$

$= \frac{2\log_{10} 5}{\log_{10} 2} \times \frac{4\log_{10} 2}{\log_{10} 3} \times \frac{3\log_{10} 3}{\log_{10} 5}$

$= 2 \times 4 \times 3 = 24$

(6) $\log_2 \sqrt{6} - \log_4 3 = \log_2 6^{\frac{1}{2}} - \frac{\log_2 3}{\log_2 4}$

$= \frac{1}{2}\log_2 6 - \frac{\log_2 3}{\log_2 2^2}$

$= \frac{1}{2}\log_2 6 - \frac{1}{2}\log_2 3$

$= \frac{1}{2}(\log_2 6 - \log_2 3)$

$= \frac{1}{2}\log_2 \frac{6}{3} = \frac{1}{2}\log_2 2 = \frac{1}{2}$

問 3–6

(1) $\log_2 25 - 2\log_4 10 - 3\log_8 10$

$= \log_2 25 - 2\frac{\log_2 10}{\log_2 4} - 3\frac{\log_2 10}{\log_2 8}$

$= \log_2 25 - 2\frac{\log_2 10}{2\log_2 2} - 3\frac{\log_2 10}{3\log_2 2}$

$= \log_2 25 - \log_2 10 - \log_2 10$

$= \log_2 \frac{25}{10\times 10} = \log_2 \frac{1}{4}$

$= \log_2 2^{-2} = -2$

(2) $\log_3 15 \cdot \log_5 15 - (\log_3 5 + \log_5 3)$

$= \log_3 15 \cdot \frac{\log_3 15}{\log_3 5} - \left(\log_3 5 + \frac{\log_3 3}{\log_3 5}\right)$

$= \frac{(\log_3 5 + \log_3 3)^2}{\log_3 5} - \frac{(\log_3 5)^2 + \log_3 3}{\log_3 5}$

$= \frac{(\log_3 5)^2 + 2\log_3 5 + 1 - (\log_3 5)^2 - 1}{\log_3 5}$

$= \frac{2\log_3 5}{\log_3 5} = 2$

(3) $(\log_2 25 + \log_4 5)(\log_5 4 + \log_5 16)$

$= \left(\log_2 25 + \frac{\log_2 5}{\log_2 4}\right)\left(\frac{\log_2 4}{\log_2 5} + \frac{\log_2 16}{\log_2 5}\right)$

$= \left(2\log_2 5 + \frac{\log_2 5}{2}\right)\left(\frac{2\log_2 2}{\log_2 5} + \frac{4\log_2 2}{\log_2 5}\right)$

$= \frac{5}{2}\log_2 5 \times \frac{6}{\log_2 5} = 15$

(4) $\log_2 27 \cdot \log_3 49 \cdot \log_7 \sqrt{125} \cdot \log_{25} 64$

$= \frac{\log_{10} 27}{\log_{10} 2} \cdot \frac{\log_{10} 49}{\log_{10} 3} \cdot \frac{\log_{10} \sqrt{125}}{\log_{10} 7} \cdot \frac{\log_{10} 64}{\log_{10} 25}$

$= \frac{\log_{10} 3^3}{\log_{10} 2} \cdot \frac{\log_{10} 7^2}{\log_{10} 3} \cdot \frac{\frac{1}{2}\log_{10} 5^3}{\log_{10} 7} \cdot \frac{\log_{10} 2^6}{\log_{10} 5^2}$

$= \frac{3\log_{10} 3}{\log_{10} 2} \cdot \frac{2\log_{10} 7}{\log_{10} 3} \cdot \frac{\frac{3}{2}\log_{10} 5}{\log_{10} 7} \cdot \frac{6\log_{10} 2}{2\log_{10} 5}$

$= 3 \times 2 \times \frac{3}{2} \times \frac{6}{2} = 27$

問 3–7

(1) $\log \frac{6}{10} = \log 2 + \log 3 - \log 10$

$= 0.3010 + 0.4771 - 1 = -0.2219$

(2) $\log 12 = \log(2^2 \times 3) = 2\log 2 + \log 3$

$= 0.3010 \times 2 + 0.4771 = 1.0791$

(3) $\log \frac{1}{7} = -\log 7 = -0.8451$

(4) $\log 0.09 = \log \frac{9}{100} = \log 9 - \log 100$

$= 2\log 3 - 2 = 0.4771 \times 2 - 2$

$= -1.0458$

問 3–8

(1) $\log(\sqrt{2} \times 10^5) = \log \sqrt{2} + \log 10^5$

$= \frac{1}{2}\log 2 + 5\log 10$

$= \frac{1}{2} \times 0.30 + 5$

$= 5.15$

(2) $\log(1.2 \times 10^{-8})$

$= \log(12 \times 10^{-9})$

$= \log(2^2 \times 3 \times 10^{-9})$

$= 2\log\ 2 + \log\ 3 + \log\ 10^{-9}$

$= 2 \times 0.30 + 0.48 - 9 = -7.92$

(3) $\log(1.5 \times 10^{-6})$

$= \log\left(\frac{3}{2} \times 10^{-6}\right)$

$= \log 3 - \log 2 + \log 10^{-6}$

$= 0.48 - 0.30 - 6 = -5.82$

問 3–9

$\log E_{6.9} = 4.8 + 1.5 \times 6.9 = 15.15$

$\log E_{7.3} = 4.8 + 1.5 \times 7.3 = 15.75$

$\log \frac{E_{7.3}}{E_{6.9}} = \log E_{7.3} - \log E_{6.9}$

$= 15.75 - 15.15 = 0.6$

したがって、$10^{0.6} = (10^{0.3})^2 = 2^2 = 4$ から、マグニチュード 7.3 のエネルギーは、マグニチュード 6.9 のエネルギーの 4 倍

問 3–10

$\log 15 = \log \frac{30}{2} = \log 3 + \log 10 - \log 2$

$= 0.4771 + 1 - 0.3010 = 1.1761$

$\log 15^{20} = 20 \log 15 = 20 \times 1.1761$

$= 23.522$

$\log 10^{23} < \log 10^{23.522} < \log 10^{24}$

したがって、24 桁

常用対数表から $\log 3.33 \fallingdotseq 0.522$

したがって、

$15^{20} = 10^{23.522} = 10^{0.522} \times 10^{23}$

$= 3.33 \times 10^{23}$

問 3–11

(1) 0.5

(2) $\ln \frac{1}{\sqrt[3]{e}} = \ln \frac{1}{e^{\frac{1}{3}}} = \ln\ e^{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}$

(3) $\ln\ e^5 - 3\ln\ e = 5\ln\ e - 3\ln\ e = 5 - 3 = 2$

(4) $\ln 3e^2 - \ln 6e + \ln 2 = \ln \frac{3e^2 \times 2}{6e} = \ln\ e = 1$

問 3–12

(1) $\ln 0.2 = \ln \frac{2}{10} = 2.303(\log 2 - \log 10)$

$= 2.303(0.3010 - 1) = -1.610$

(2) $\ln 0.5 = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2 = -2.303 \times 0.3010$

$= -0.6932$

(3) $\ln 0.6 = \ln \frac{2 \times 3}{10}$

$= 2.303 \log \frac{2 \times 3}{10}$

$= 2.303(\log 2 + \log 3 - \log 10)$

$= 2.303(0.3010 + 0.4771 - 1)$

$= -0.5110$

問 3–13

(1) 1

(2) e

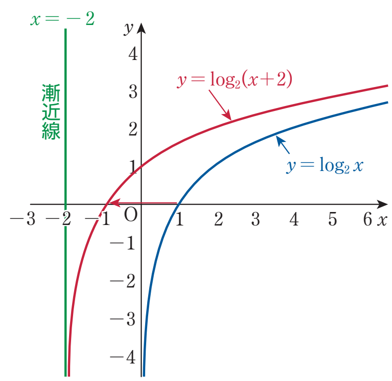
(3) $\frac{1}{(\sqrt[5]{e})^{\ln 32}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{5} \cdot \ln 2^5}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{5} \cdot 5 \ln 2}} = \frac{1}{e^{\ln 2}} = \frac{1}{2}$

(4) $\frac{e^{\ln 3 - \ln 4}}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{e^{\frac{3}{4}}}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{1} = \frac{3}{2}$

問 3–14

(1) $y = \log_2\ x$ のグラフをx 軸方向へ-2だけ平行移動したものです。

漸近線は、 $x = -2$



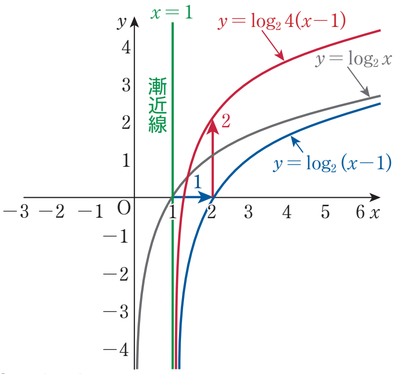
(2) $y = \log_2\ 4(x-1) = \log_2\ 4 + \log_2\ (x-1)$

$= \log_2\ (x-1) + 2$ から、

$y = \log_2\ x$ のグラフを x 軸方向へ 1 だけ平行移動した$y = \log_2(x-1)$のグラフを、さらに y 軸方向へ 2 だけ平行移動したものです。

漸近線は $x = 1$

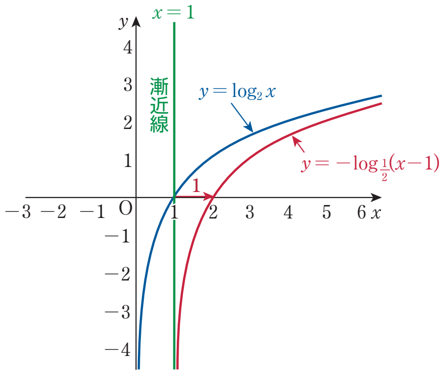
(3) $y = -\log_{\frac{1}{2}}(x-1) = -\frac{\log_2(x-1)}{\log_2 \frac{1}{2}}$



$= -\frac{\log_2(x-1)}{-\log_2 2} = \log_2(x-1)$ から、

$y = \log_2 x$ のグラフをx軸方向へ 1 だけ平行移動したものです。

漸近線は $x = 1$



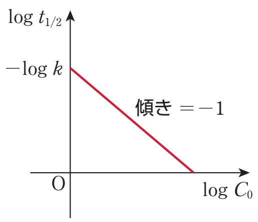
問 3–15

(1) $t_{1/2} = \frac{1}{kC_0}$ 両辺の 10 を底とする対数をとると、

$$\log t_{1/2} = \log \frac{1}{kC_0} = -\log kC_0$$

$$= -\log k - \log C_0$$

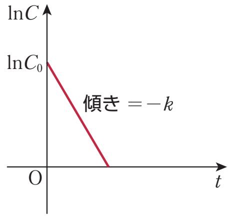
y 切片：$-\log k$、傾き：-1



(2) $C = C_0 e^{-kt}$ 両辺の e を底とする対数をとると、

$$\ln C = \ln C_0 + \ln e^{-kt} = \ln C_0 - kt$$

y 切片：$\ln C_0$、傾き：$-k$

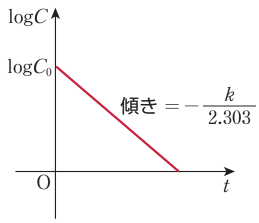


(3) $\ln C = 2.303 \log C$から、$\ln C = \ln C_0 - kt$は、

$2.303 \log C = 2.303 \log C_0 - kt$となり、

$\log C = \log C_0 - \frac{k}{2.303} t$

y 切片：$\log C_0$、傾き：$-\frac{k}{2.303}$



問 3–16

$[H^+]$ = 溶液のモル濃度 × 価数 × 電離度から、

$[H^+] = 0.03 \cdot 1 \cdot 1 = 3 \times 10^{-2}$ mol/L

$$pH = -\log[H^+] = -\log(3 \times 10^{-2})$$
$$= -(\log 3 + \log 10^{-2}) = -\big(0.4771 + (-2)\big)$$
$$= -(-1.5229) \fallingdotseq 1.5$$

問 3–17

$[H^+] = 0.015 \cdot 2 \cdot 1 = 3 \times 10^{-2}$ mol/L

$$pH = -\log[H^+] = -\log(3 \times 10^{-2})$$
$$= -(\log 3 + \log 10^{-2}) = 2 - 0.4771 \fallingdotseq 1.5$$

問 3–18

1×10^{-2} mol/L の塩酸 HCl 1.0 mL に精製水を加え、全体量を 200 mL にしたので、塩酸

HCl のモル濃度は、200 倍に希釈されたことになります。したがって、

$1 \times 10^{-2} \cdot \frac{1}{200} = 1 \times 10^{-2} \cdot 0.5 \times 10^{-2}$

$= 5 \times 10^{-5}$ mol/L

$[H^+] = 5 \times 10^{-5} \cdot 1 \cdot 1 = 5 \times 10^{-5}$ mol/L

$\mathrm{pH} = -\log[H^+] = -\log(5 \times 10^{-5})$

$= 5 - \log 5 = 5 - \log \frac{10}{2}$

$= 5 - (\log 10 - \log 2)$

$= 5 - 1 + 0.3010 = 4.3010 ≒ 4.3$

問 3–19

希釈前の水酸化ナトリウム水溶液の濃度を求めます。

水のイオン積$K_w = [H^+][OH^-] = 1.0 \times 10^{-14}$

から、

$[OH^-]$の式に変形して、

$[OH^-] = \frac{1.0 \times 10^{-14}}{[H^+]}$

$\mathrm{pH} = 13$ですから、$[H^+] = 1 \times 10^{-13}$

したがって、

$[OH^-] = \frac{1.0 \times 10^{-14}}{[H^+]} = \frac{1.0 \times 10^{-14}}{1 \times 10^{-13}}$

$= 1 \times 10^{-14} \cdot 1 \times 10^{13} = 1 \times 10^{-1}$ mol/L

1000 倍に希釈すると、

$[OH^-] = 1 \times 10^{-1} \cdot \frac{1}{1000}$

$= 1 \times 10^{-1} \cdot 1 \times 10^{-3}$

$= 1 \times 10^{-4}$ mol/L

水のイオン積$K_w = [H^+][OH^-] = 1.0 \times 10^{-14}$

から、

$[H^+]$の式に変形して、

$[H^+] = \frac{1.0 \times 10^{-14}}{1 \times 10^{-4}} = 1.0 \times 10^{-14} \cdot 1 \times 10^{4}$

$= 1 \times 10^{-10}$

$\mathrm{pH} = -\log[H^+] = -\log(1 \times 10^{-10}) = 10$

問 3–20

グルコース標準液吸光度を A_G とすると、

$A_G = 2 - \log T = 2 - \log 10 = 2 - 1 = 1$

患者血清の吸光度を A_P とすると、

$A_P = 2 - \log T = 2 - \log 1 = 2 - 0 = 2$

患者血清のグルコース濃度は標準液の 2 倍です。

ランベルト・ベールの法則から、吸光度$A = \varepsilon c l$で表すことができます。

ただし、A: 吸光度、ε: 吸光係数、c: 溶液のモル濃度、l: 光路長

この式から、吸光係数と光路長が一定と考えると、グルコース濃度と吸光度は比例関係にあることがわかります。

したがって、吸光度が 2 倍になると溶液の濃度も 2 倍になります。つまり、患者血清のグルコース濃度は標準液の 2 倍になります。

患者血清のグルコース濃度$= 200$ (mg./dL) $\cdot 2$

$= 400$ mg/dL

国試問題にチャレンジ

問 3–1

$[OH^-] =$ 溶液のモル濃度 × 価数 × 電離度

から、

$[OH^-] = 0.01 \times 1 \times 1 = 1.0 \times 10^{-2}$mol/L

です。

水のイオン積$K_w = [H^+][OH^-] = 1.0 \times 10^{-14}$

から、

$[H^+]$の式に変形して、

$[H^+] = \frac{1.0 \times 10^{-14}}{1 \times 10^{-2}} = 1.0 \times 10^{-14} \cdot 1 \times 10^{2}$

$= 1 \times 10^{-12}$

となります。したがって、

$\mathrm{pH} = -\log[H^+] = -\log(1 \times 10^{-12}) = 12$

問 3–2

$[H^+] =$ 溶液のモル濃度 × 価数 × 電離度から、

$[H^+] = 0.1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \times 10^{-1}$ mol/L

です。したがって、

$\mathrm{pH} = -\log[H^+] = -\log(1 \times 10^{-1}) = 1$

問 3–3 H_2CO_3（分子形）と HCO_3^-（イオン形）の存在比は、与えられたヘンダーソン・ハッセルバルヒ式を用いて計算できます。

$\mathrm{pH} = \mathrm{p}K_a + \frac{[イオン形]}{[分子形]} = \mathrm{p}K_a + \log\frac{[HCO_3^-]}{[H_2CO_3]}$から、

$7.3 = 6.1 + \log\frac{[HCO_3^-]}{[H_2CO_3]}$

となります。式を変形して。

$\log\frac{[HCO_3^-]}{[H_2CO_3]} = 7.3 - 6.1 = 1.2$

となります。したがって、

$\frac{[HCO_3^-]}{[H_2CO_3]} = 10^{1.2}$

となります。

$\log_{10} 1.6 = 0.2$は、$p = \log_a M \Leftrightarrow a^p = M$から、$10^{0.2} = 1.6$です。

したがって、

$\frac{[HCO_3^-]}{[H_2CO_3]} = 10^{1.2} = 10^1 \times 10^{0.2} = 10 \cdot 1.6 = 16$

したがって、分子形・イオン形の存在比は、

[分子形]: [イオン形] = 1: 16

問 3–4　問題文から、オメプラゾールは弱酸です。弱酸性薬物の分子形・イオン形の存在は、ヘンダーソン・ハッセルバルヒ式を用いて計算できます。

$\mathrm{pH} = \mathrm{p}K_a + \frac{[イオン形]}{[分子形]}$から、

$7.4 = 8.9 + \log\frac{[イオン形]}{[分子形]}$

となります。式を変形して。

$\log\frac{[イオン形]}{[分子形]} = 7.4 - 8.9 = -1.5$

となります。したがって、

$$\frac{[イオン形]}{[分子形]} = 10^{-1.5} = \frac{1}{10^{1.5}} = \frac{1}{10^{1+0.5}}$$
$$= \frac{1}{10^1 \cdot 10^{0.5}} = \frac{1}{10 \cdot \sqrt{10}}$$
$$= \frac{1}{10 \cdot 3.2} = \frac{1}{32}$$

となります。

したがって、分子形・イオン形の存在比は、

[分子形]: [イオン形] = 32: 1

問 3–5　分解が 1 次反応に従う化合物の残存量は、半減期ごとに半分になります。本文から化合物の半減期は 3 日とあることから、6 日後の化合物の残存量は、$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$になります。

したがって、

6 日間 25 ℃ で保存したときの残存量は、

残存量$= 100\ (\mathrm{mg}) \cdot \frac{1}{4} = 25\ \ \mathrm{mg}$

問 3–6

問題文に「テオフィリンの血中動態は線形 1–コンパートメントモデルに従うもの」と指定されているので、テオフィリンの血中薬物濃度は、

$$\ln C = -k_e t + \ln C_0 \quad \cdots ①$$

で表せます。

ここで、C：投与開始t時間後の血中薬物濃度、k_e：消失速度定数、t：時間、C_0：投与開始直後の血中薬物濃度を表します。

問題文に血中消失半減期が与えられていますから消失速度定数を血中消失半減期の式に変換します。

$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k_e}$から、$k_e = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$を①式に代入すると、

$$\ln C = -\frac{\ln 2}{t_{1/2}} + \ln C_0 \quad \cdots ②$$

ここで、$t_{1/2}$：血中消失半減期を表します。

テオフィリンの血中濃度が 40 μg/mL から 15 μg/mL に低下するまでの時間を②式を用いて求めます。

問題文から、血中消失半減期は、6.9 時間ですから、

$$\ln 15 = -\frac{0.69}{6.9} \cdot t + \ln 40$$
$$0.1t = \ln 40 - \ln 15 = \ln\frac{40}{15} = \ln\frac{8}{3}$$
$$= \ln 8 - \ln 3 = \ln 2^3 - \ln 3 = 3\ln 2 - \ln 3$$
$$= 3 \cdot 0.69 - 1.10$$
$$= 2.07 - 1.10 = 0.97$$

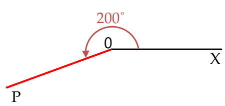
したがって、

$t = \frac{0.97}{0.1} = 9.7$ 時間

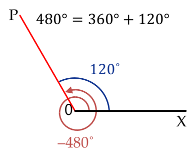
第 4 章 解答

問 4–1

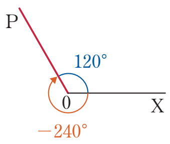
(1) 200°

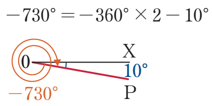


(2) 480°



(3) −240°　　　　(4) −730°





問 4–2

55°の動径と同じ位置にある角は、

② $415° = 360° + 55°$

④ $775° = 360° \times 2 + 55°$

⑤ $-305° = -360° + 55°$

問 4–3

中心角	弧度法	度数法
半円	π	180°
半円の 2 等分	$\frac{\pi}{2}$	90°
半円の 3 等分	$\frac{\pi}{3}$	60°
半円の 4 等分	$\frac{\pi}{4}$	45°
半円の 6 等分	$\frac{\pi}{6}$	30°

問 4–4

(1) $\sin\frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$　　$\cos\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$

$\tan\frac{2}{3}\pi = -\sqrt{3}$

(2) $\sin\frac{5}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$　　$\cos\frac{5}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan\frac{5}{4}\pi = 1$

(3) $\sin(-\pi) = 0$　　$\cos(-\pi) = -1$

$\tan(-\pi) = 0$

(4) $\sin\frac{13}{6}\pi = \frac{1}{2}$　　$\cos\frac{13}{6}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\frac{13}{6}\pi = \frac{1}{\sqrt{3}}$

問 4–5

円の半径は、$1^2 + 1^2 = r^2$から、$r = \sqrt{2}$

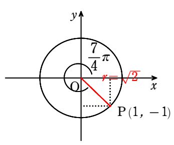
三角関数の定義から、

$\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan\theta = -1$

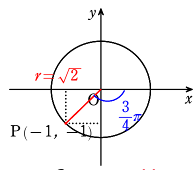
$\theta = \frac{7}{4}$



問 4–6

$\sin\theta < 0, \tan\theta > 0$ から、θ は第 3 象限の角

点 P の座標は、$P(-1,-1)$ となります。



$\theta = -2\pi - \frac{3}{4}\pi = -\frac{11}{4}\pi$

問 4–7

$\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ ですから、

$= \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

問 4–8

(1) $0 \leqq \theta \leqq \pi$、$\cos\theta > 0$から、θ は第 1 象限の角です。

したがって、$\sin\theta > 0$、$\tan\theta > 0$

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{15}{16}$ から、

$\sin\theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{\frac{1}{4}} = \sqrt{15}$

(2) $0 \leqq \theta \leqq \pi$、$\tan\theta < 0$から、θ は第 2 象限の角です。

したがって、$\sin\theta > 0$、$\cos\theta < 0$

$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$

に代入して、

$1 + (-5)^2 = 26 = \frac{1}{\cos^2\theta}$

$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{26}}$

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$から、

$\sin\theta = \tan\theta\cos\theta = -5 \times \left(-\frac{1}{\sqrt{26}}\right) = \frac{5}{\sqrt{26}}$

問 4–9

(1) $\cos\frac{14}{3}\pi=\cos\left(4\pi+\frac{2}{3}\pi\right)$

$=\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}$

(2) $\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)=-\sin\frac{5}{6}\pi=-\frac{1}{2}$

(3) $\cos\frac{5}{4}\pi=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}$

$=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

(4) $\sin\frac{11}{6}\pi=\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)$

$=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}$

$=-\frac{1}{2}$

(5) $\tan\left(-\frac{7}{3}\pi\right)=-\tan\frac{7}{3}\pi$

$=-\tan\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\tan\frac{\pi}{3}$

$=-\sqrt{3}$

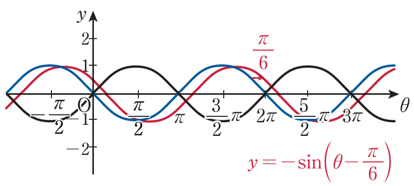
問 4–10

$\sin\frac{5}{8}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right)=\cos\frac{\pi}{8}=a$

問 4–11

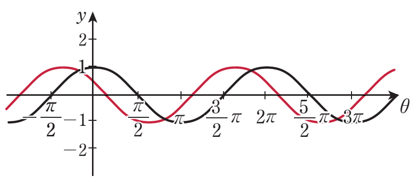
(1)

$y=\sin\theta$のグラフをθ軸に関して 対称移動した $y=-\sin\theta$ のグラフをθ軸方向へ$\frac{\pi}{6}$平行移動したグラフです。



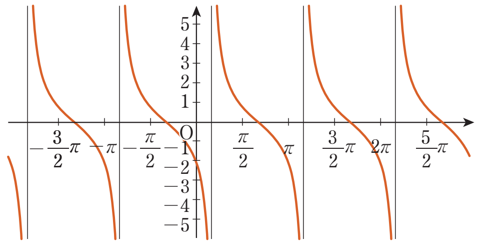
(2)

$y=\cos\theta$のグラフをθ軸方向へ$-\frac{\pi}{3}$平行移動したグラフです。



(3)

$y=\tan\theta$のグラフをθ軸に関して対称移動した



た$y=-\tan\theta$のグラフをθ軸方向へ$-\frac{4}{3}\pi$平行移動したグラフです。

問 4–12

(1) $\sin\frac{7}{12}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$

$=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

(2) $\cos\frac{7}{12}\pi=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$

$=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

(3) $\cos\frac{5}{12}\pi=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)$

$=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$

$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(4) $\tan\frac{5}{12}\pi=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)$

$=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}$

$=\frac{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$

$=\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$

$=\frac{4+2\sqrt{3}}{3-1}=2+\sqrt{3}$

(5) $\tan\frac{7}{12}\pi=\tan\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{3}+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}}$

$=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\cdot1}=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}$

$=\frac{(\sqrt{3}+1)(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}$

$=\frac{4+2\sqrt{3}}{1-3}=-2-\sqrt{3}$

問 4–13　$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ から、$\cos\alpha<0$

$0<\beta<\frac{\pi}{2}$から、　$\sin\beta>0$となります。

$\cos^2\alpha=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$ 条件から、$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

同様に、$\sin^2\beta=1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$

条件から、$\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

問 4–14　$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$から、$\sin\theta>0$となります。

$\sin^2\theta=1-\left(-\frac{8}{17}\right)^2=1-\frac{64}{289}=\frac{225}{289}$から、

$\sin\theta=\frac{15}{17}$

$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\cdot\frac{15}{17}\cdot\left(-\frac{8}{17}\right)=-\frac{240}{289}$

$\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$から、$\sin\frac{\theta}{2}>0$

$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}=\frac{1-\left(-\frac{8}{17}\right)}{2}=\frac{\frac{25}{17}}{2}=\frac{25}{34}$

条件から、

$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{5}{\sqrt{34}}$

問 4–15

(1) $\cos 2\theta-3\cos\theta+2=0$

$2\cos^2\theta-1-3\cos\theta+2=0$

$2\cos^2\theta-3\cos\theta+1=0$

$(2\cos\theta-1)(\cos\theta-1)=0$

$\cos\theta=\frac{1}{2}$ または、$\cos\theta=1$ $0\leqq\theta<2\pi$から、

$\cos\theta=\frac{1}{2}$ になるのは 、$\theta=\frac{\pi}{3},\frac{5}{3}\pi$

$\cos\theta=1$ になるのは 、$\theta=0$ です。

したがって、$\theta=0,\frac{\pi}{3},\frac{5}{3}\pi$

(2) $\cos 2\theta-\sin\theta=0$

$1-2\sin^2\theta-\sin\theta=0$

$2\sin^2\theta+\sin\theta-1=0$

$2\sin^2\theta+\sin\theta-1=0$

$(2\sin\theta-1)(\sin\theta+1)=0$

したがって、 $\sin\theta=\frac{1}{2}$または、$\sin\theta=-1$

$0\leqq\theta<2\pi$から、

$\sin\theta=\frac{1}{2}$ になるのは、$\theta=\frac{\pi}{6},\frac{5}{6}\pi$

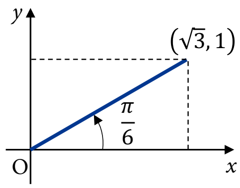
$\sin\theta=-1$ になるのは、$\theta=\frac{3}{2}\pi$です。

したがって、$\theta=\frac{\pi}{6},\frac{5}{6}\pi,\frac{3}{2}\pi$

問 4–16

(1)　$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$ の式から、

$r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$



$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$

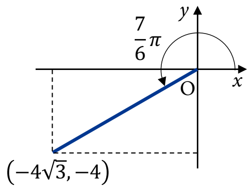
(2) 公式にしたがって、

$r=\sqrt{(-4\sqrt{3})^2+(-4)^2}=\sqrt{48+16}=\sqrt{64}$

$=8$

$-4\cos\theta-4\sqrt{3}\sin\theta=-4\sqrt{3}\sin\theta-4\cos\theta$

$=8\sin\left(\theta-\frac{5}{6}\pi\right)$



(3) $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)-\cos\theta$

$=\sin\theta\cos\frac{\pi}{6}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{6}-\cos\theta$

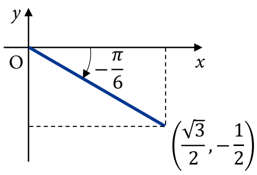
$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta-\cos\theta$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta$

公式にしたがって、

$r=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=1$

$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)-\cos\theta=\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$



問 4–17

(1) $\cos\frac{5}{12}\pi\cos\frac{\pi}{12}$

$=\frac{1}{2}\left\{\cos\left(\frac{5}{12}\pi+\frac{\pi}{12}\right)+\cos\left(\frac{5}{12}\pi-\frac{\pi}{12}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$

(2) $\sin\frac{7}{12}\pi-\sin\frac{\pi}{12}$

$=2\cos\left(\frac{\frac{7}{12}\pi+\frac{\pi}{12}}{2}\right)\sin\left(\frac{\frac{7}{12}\pi-\frac{\pi}{12}}{2}\right)$

$=2\cos\frac{\frac{8}{12}\pi}{2}\sin\frac{\frac{6}{12}\pi}{2}$

$=2\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$

$=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

第 5 章 解答

問 5–1 (1) 初項$\frac{1}{2}$、公差$-\frac{3}{2}$ですから、

一般項$a_n=a+(n-1)d$に代入して、

$a_n=\frac{1}{2}+(n-1)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}n+\frac{3}{2}$

$=-\frac{3}{2}n+2$

第 8 項$a_8=-\frac{3}{2}\cdot8+2=-10$

(2) 初項$\sqrt{2}+1$、公差$-\sqrt{2}+2$ですから、一般項は、

$a_n=\sqrt{2}+1+(n-1)\cdot(-\sqrt{2}+2)$

$=\sqrt{2}+1+(-\sqrt{2}+2)n+\sqrt{2}-2$

$=(2-\sqrt{2})n+2\sqrt{2}-1$

第 8 項$a_8=(2-\sqrt{2})8+2\sqrt{2}-1$

$=16-8\sqrt{2}+2\sqrt{2}-1=15-6\sqrt{2}$

(3) 初項 $\frac{1}{2}$、第 4 項が 32 ですから、まず公差 d を求めます。

$a_4=\frac{1}{2}+(4-1)\cdot d=\frac{1}{2}+3d=32$

したがって、

$d=\frac{32-\frac{1}{2}}{3}=\frac{\frac{63}{2}}{3}=\frac{63}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{21}{2}$

以上から、公差$d=\frac{21}{2}$が求まりました。

したがって、一般項は、

$a_n=\frac{1}{2}+(n-1)\cdot\left(\frac{21}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}+\frac{21}{2}n-\frac{21}{2}=\frac{21}{2}n-10$

となります。

第 8 項$a_8=\frac{21}{2}\cdot8-10=84-10=74$

(4) 第 10 項が 30、第 20 項が 0 ですから、まず公差 d を求めます。

$a_{10}=a+(10-1)\cdot d=a+9d=30 \quad\cdots ①$

$a_{20}=a+(20-1)\cdot d=a+19d=0 \quad\cdots ②$

①式から②式を引きます。

$-10d=30$

したがって、$d=-3$となります。

$d=-3$を①式に代入すると、

$a+9\cdot(-3)=30$

$a=30+27=57$

以上から、初項$a=57$、公差$d=-3$が求まりました。

したがって、一般項は、

$a_n=57+(n-1)\cdot(-3)=57-3n+3$

$=-3n+60$

となります。

第 8 項$a_8=-3\cdot8+60=60-24=36$

(5) 第 62 項が 185、第 74 項が 221 ですから、まず公差 d を求めます。

$a_{62}=a+(62-1)\cdot d$

$=a+61d=185 \quad\cdots ③$

$a_{74}=a+(74-1)\cdot d$

$=a+73d=221 \quad\cdots ④$

③式から④式を引きます。

$-12d=-36$

したがって、$d=3$となります。

$d=3$を③式に代入すると、

$a+61\cdot3=185$

$a=185-183=2$

以上から、初項$a=2$、公差$d=3$が求まりました。

したがって、一般項は、

$a_n=2+(n-1)\cdot3=2+3n-3$

$=3n-1$

となります。

第 8 項$a_8=3\cdot8-1=24-1=23$

問 5–2

⑴ 初項−10、公差 2、項数 18 を等差数列の和の公式

$S_n=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$に代入します。

$S_n=\frac{18}{2}\{2\cdot(-10)+(18-1)\cdot 2\}$

$=9\cdot(-20+34)=9\cdot 14=126$

⑵ $-20,-18,-16,\cdots,28$は、初項$a=-20$、公差$d=2$、末項$l=28$です。

一般項$a_n=a+(n-1)d$に代入して、まず一般項を求めます。

$a_n=-20+(n-1)\cdot 2=-20+2n-2$

$=2n-22$

次に、末項$l=28$が第何項となるかを求めます。

$2n-22=28$

$n=\frac{28+22}{2}=\frac{50}{2}=25$

以上から、$S_n=\frac{n}{2}(a+l)$に代入して、和を求めます。

$S_{28}=\frac{25}{2}(-20+28)=\frac{25\cdot 8}{2}=100$

⑶ まず、一般項の公式$a_n=a+(n-1)d$に代入して、初項aを求めます。

$a_{30}=a+(30-1)\cdot(-4)=58$

$a+29\cdot(-4)=58$

$a=58+116=174$

したがって、

次に、初項から第 80 項までの和を求めます。

$S_{80}=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$

$=\frac{80}{2}\cdot\{2\cdot 174+79\cdot(-4)\}$

$=40\cdot(348-316)$

$=40\cdot 32=1280$

次に、初項から第 49 項までの和を求めます。

$S_{49}=\frac{49}{2}\cdot\{2\cdot 174+48\cdot(-4)\}$

$=\frac{49}{2}\cdot(348-192)$

$=\frac{49}{2}\cdot 156=3822$

第 50 項から第 80 項の和は、初項から第 80 項までの和から初項から第49項までの和を引くことで求まります。

したがって、

$S=S_{80}-S_{49}=1280-3822=-2542$

問 5−3

⑴ 初項が−3、公比が 2 ですから、

一般項の公式$a_n=a\cdot r^{n-1}$から、

$a_n=-3\cdot 2^{n-1}$

第 6 項は、

$a_6=-3\cdot 2^{6-1}=-3\cdot 2^5=-3\cdot 32=-96$

⑵ 公比が$\frac{1}{2}$、第 4 項が 32 ですから、まず初項を求めます。

$a_4=a\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{4-1}=32$

$a=\frac{32}{\left(\frac{1}{2}\right)^3}=\frac{32}{\frac{1}{8}}=32\cdot 8=256$

一般項a_nは、

$a_n=256\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2^8\cdot(2^{-1})^{n-1}$

$=2^8\cdot 2^{-n+1}=2^{-n+9}$

第 6 項は、

$a_6=2^{-6+9}=2^3=8$

⑶ $100,50,25,12.5,\cdots$

初項$a=100$、公比$r=\frac{1}{2}$です。

したがって、一般項a_nは、

$a_n=100\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

または、

$a_n=25\cdot 4\cdot(2^{-1})^{n-1}=25\cdot 2^{-n+3}$

第 6 項は、

$a_6=100\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{6-1}=100\cdot\frac{1}{32}=\frac{100}{32}=\frac{25}{8}$

⑷ 第 2 項が−6、第 5 項が 162 ですから、まず公比 r を求めます。

$a_2=a\cdot r^{2-1}=-6$から、

$a\cdot r=-6\quad\cdots$ ⑤

$a_5=a\cdot r^{5-1}=162$から、

$a\cdot r^4=162\quad\cdots$ ⑥

⑥式を⑤式で割ると、$\frac{a\cdot r^4}{a\cdot r}=\frac{162}{-6}=-27$

したがって、$r^3=-27$

$r=-3$

また、⑤式から、$a=\frac{-6}{r}=\frac{-6}{-3}=2$

以上から、一般項a_nは、

$a_n=2\cdot(-3)^{n-1}$

第 6 項は、

$a_6=2\cdot(-3)^{6-1}=2\cdot(-3)^5=2\cdot(-243)$

$=-486$

問 5–4

(1) 初項 100、公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列ですから、

$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ に代入して、

$$S_n = \frac{100\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right)}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= 100\cdot\left(1-\frac{1}{1024}\right)\cdot 2 = 200\cdot\left(\frac{1024-1}{1024}\right)$$

$$= 200\cdot\frac{1023}{1024} = \frac{25\cdot 1023}{128} = \frac{25575}{128}$$

(2) 初項 9、公比–3 の等比数列ですから、

$$S_n = \frac{9\cdot\{1-(-3)^n\}}{1-(-3)} = \frac{9}{4}\{1-(-3)^n\}$$

(3) 初項 9、公比 0.1 の等比数列ですから、

$$S_n = \frac{9\cdot(1-0.1^n)}{1-0.1} = \frac{9\cdot(1-0.1^n)}{0.9}$$

$$= 10 - 10\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^n = 10-\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$$

問 5–5

(1) ∑記号を用いて表すと、

$$\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2$$

(2) ∑記号を用いて表すと、

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i-\bar{x})^2$$

(3) ∑記号を用いて表すと、

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$$

問 5–6

(1) $\displaystyle\sum_{k=5}^{14}(k+1) = \sum_{k=1}^{14}(k+1) - \sum_{k=1}^{4}(k+1)$

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1) = \sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}1$$

$$\sum_{k=1}^{n}k = \frac{1}{2}n(n+1)\text{、}\quad \sum_{k=1}^{n}c = nc$$

(cは定数) から、

$$\sum_{k=5}^{14}(k+1)$$

$$= \left\{\frac{14}{2}(14+1)+14\cdot 1\right\} - \left\{\frac{4}{2}(4+1)+4\cdot 1\right\}$$

$$= (7\cdot 15+14)-(2\cdot 5+4)$$

$$= 119-14 = 105$$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(4k+3) = 4\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}3$

$$= 4\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\} + 3n$$

$$= 2n(n+1)+3n$$

$$= 2n^2+5n = n(2n+5)$$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+3)(k-2)$

$$= \sum_{k=1}^{n}(k^2-2k+3k-6) = \sum_{k=1}^{n}(k^2+k-6)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}k^2 + \sum_{k=1}^{n}k - \sum_{k=1}^{n}6$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1) - 6n$$

$$= \frac{1}{6}n(2n^2+3n+1) + \frac{3}{6}n(n+1) - \frac{36}{6}n$$

$$= \frac{1}{6}n(2n^2+3n+1+3n+3-36)$$

$$= \frac{1}{6}n(2n^2+6n-32) = \frac{1}{3}n(n^2+3n-16)$$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2\cdot 3^{k-1}$

公比$r=3$、一般項は、$a_n = 2\cdot 3^{n-1}$ですから、

初項$a=2$の等比数列となります。

これを等比数列の和の公式

$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$に代入します。

$$S_n = \frac{2(3^n-1)}{3-1} = 3^n-1$$

問 5–7

(1) $1, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{3^3}, \frac{1}{4^3}\cdots$ は、0 に収束します。

(2) $2, 2\cdot 2^2, 2\cdot 3^2, 2\cdot 4^2, \cdots$ は、正の無限大に発散します。

(3) $-1, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{4}}, \cdots$ は、0 に収束します。

(4) $1+1, 2+\frac{1}{2}, 3+\frac{1}{3}, 4+\frac{1}{4}, \cdots$ は、正の無限大に発散します。

問 5–8

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(5n^2-n^3) = \lim_{n\to\infty}n^3\left(-1+\frac{5}{n}\right) = -\infty$

したがって、負の無限大に発散します。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4-n}{2n+5} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\left(\frac{4}{n}-1\right)}{n\left(2+\frac{5}{n}\right)}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{n}-1}{2+\frac{5}{n}} = -\frac{1}{2}$$

したがって、$-\frac{1}{2}$に収束します。

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-1)(n+1)}{(n-1)}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)=\infty$

したがって、正の無限大に発散します。

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1+\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$

したがって、0 に収束します。

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-2n+1}{2n^2+n-3}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(2+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}\right)}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}}=\frac{1}{2}$

したがって、$\frac{1}{2}$に収束します。

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}-1}{n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+1}-1)(\sqrt{n^1+1}+1)}{n(\sqrt{n^1+1}+1)}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+1+\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2+1}-1}{n(\sqrt{n^2+1}+1)}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n(\sqrt{n^2+1}+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+1}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\times\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}\{\sqrt{n^2+1}+1\}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\frac{1}{n}}=1$

したがって、1 に収束します。

問 5–9

(1) $\left(\frac{3}{2}\right)^n$の公比$\frac{3}{2}>1$ですから、

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n=\infty$

したがって、正の無限大に発散します。

(2) $\left(-\frac{2}{3}\right)^n$の公比$\left|-\frac{2}{3}\right|<1$ですから、

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n=0$

したがって、0 に収束します。

(3) $\left(-\frac{4}{3}\right)^n$の公比$-\frac{4}{3}\leqq-1$ですから、

数列$\left(-\frac{4}{3}\right)^n$は、振動し、極限はありません。

問 5–10

(1) $1, 0.9, (0.9)^2, (0.9)^3, \cdots$

第 n 項$a_n=(0.9)^{n-1}$では、公比 $|0.9|<1$ですから、

$\lim\limits_{n\to\infty}(0.9)^{n-1}=0$

したがって、0 に収束します。

(2) $\frac{1}{2}, 1, 2, 4, \cdots$

第 n 項$a_n=2^{n-2}$では、公比 $2>1$ですから、

$\lim\limits_{n\to\infty}2^{n-2}=\infty$

したがって、正の無限大に発散します。

(3) $1, -2, 4, -8, \cdots$

第 n 項$a_n=(-2)^{n-1}$では、公比 $-2\leqq-1$ですので、

数列$(-2)^{n-1}$は、振動し、極限はありません。

(4) $1, 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, \cdots$

第n項$a_n=2^{-n+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$では、公比 $\left|\frac{1}{2}\right|<1$ですから、

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$

したがって、0 に収束します。

(5) $1, \frac{1}{e}, \frac{1}{e^2}, \frac{1}{e^3}, \cdots$ ($e=2.718$ とする)

第n項$a_n=\frac{1}{e^{n-1}}=\left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}$では、公比 $\left|\frac{1}{e}\right|<1$ですので、

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{e^{n-1}}=0$

したがって、0 に収束します。

問 5–11

(1) 初項 $\sqrt{2}$、公比 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

公比$\left|-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|<1$ですから、

この無限等比級数は、収束します。

無限等比級数の和の公式から、

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{a}{1-r}$$

$=\frac{\sqrt{2}}{1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}=\cdot\frac{2\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$

$=\frac{2\sqrt{2}\cdot(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}=\frac{4\sqrt{2}-4}{4-2}$

$=2\sqrt{2}-2$

(2) 初項 $\sqrt{3}$、公比 $\sqrt{3}$

公比$|\sqrt{3}|>1$ですから、

この無限等比級数は、発散します。

(3) $1-2+4-8+\cdots$

初項 1、公比 -2、

公比$|-2|\geqq1$ですから、

この無限等比級数は、発散します。

(4) $a+\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}a+\frac{1}{8}a+\cdots\ (a\neq0)$

初項 a、公比 $\frac{1}{2}$、
公比$\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ですから、
この数列は収束します。
無限等比級数の和の公式から、

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{a}{1-r}$$
$$= \frac{a}{1-\frac{1}{2}} = \frac{a}{\frac{1}{2}} = 2a$$

問 5–12

(1) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$から、

$$e^{0.3} = 1 + \frac{0.3}{1} + \frac{0.3^2}{2\cdot1} + \frac{0.3^3}{3\cdot2\cdot1}$$
$$= 1 + 0.3 + \frac{0.09}{2} + \frac{0.027}{6}$$
$$= 1.3 + 0.045 + 0.0045 = 1.3495$$

実際の値は、1.34986 です。

(2) まず、度数法 (°) を弧度法 (rad) に変換します。

$$31° = \frac{\pi}{180} \times 31 = \frac{3.1416}{180} \times 31 \fallingdotseq 0.541 \ \ \mathrm{rad}$$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$から、

$$\cos 31° = 1 - \frac{0.541^2}{2\cdot1} + \frac{0.541^4}{4\cdot3\cdot2\cdot1} - \frac{0.541^6}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}$$
$$= 1 - \frac{0.292681}{2} + \frac{0.08566216776}{24} - \frac{0.0250716889224572}{720}$$
$$\fallingdotseq 1 - 0.14634 + 0.003570 - 0.00003$$
$$= 0.8572$$

実際の値は、0.8572 です。

(3) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$から、

$$\ln 1.2 = 0.2 - \frac{0.2^2}{2} + \frac{0.2^3}{3} - \frac{0.2^4}{4}$$
$$= 0.2 - \frac{0.04}{2} + \frac{0.008}{3} - \frac{0.0016}{4}$$
$$\fallingdotseq 0.2 - 0.02 + 0.0027 - 0.0004$$
$$= 0.1823$$

実際の値は、0.1823 です。

国試問題にチャレンジ

問 5–1

薬物を反復投与した時に、定常状態における血中薬物濃度のピーク値やトラフ値の単回投与時の値に対する比を蓄積率といい、次の式で表せます。

$$R = \frac{1}{1-e^{-k_e\tau}} \qquad \cdots ①$$

ここで、τ =投与間隔時間、k_e =消失速度定数を表します。

k_eと半減期（$t_{1/2}$）との間には、$k_e = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$の関係がありますから、これを①式 に代入すると、

$$R = \frac{1}{1-e^{-k_e\tau}} = \frac{1}{1-e^{-\ln 2\cdot\frac{\tau}{t_{1/2}}}} = \frac{1}{1-\frac{1}{e^{\ln 2\cdot\frac{\tau}{t_{1/2}}}}}$$

$$\boxed{e^{-\ln 2} = \frac{1}{e^{\ln 2}} = \frac{1}{2}}$$

$$\boxed{a^{-b} = \frac{1}{a^b}} \qquad \boxed{e^{\ln a} = a}$$

$$= \frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\tau}{t_{1/2}}}} \qquad \cdots ②$$

となり、蓄積率 R は、投与間隔時間 τ と消失半減期$t_{1/2}$によって決まることわかります。半減期ごとに繰り返し投与された場合、②式に$\tau = t_{1/2}$を代入して計算すると、

$$R = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_{1/2}}{t_{1/2}}}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

となります。したがって、消失半減期ごとに同量繰り返し投与した場合の蓄積率は、2 です。

問 5–2

一定間隔での繰り返し投与なので、平均血中薬物濃度$C_{ss,av}$は、

$$C_{ss,av} = \frac{D\cdot F}{CL_{out}\cdot\tau} \qquad \cdots ①$$

で示されます。ここで、D =投与量、CL_{tot} =全身クリアランス、τ =投与間隔時間、F =バイオアベイラビリティを表します。

設問は、「1 回あたりの散剤の投与量を求めなさい」とありますので、①式を D の式に変形します。

$$D = C_{ss,av}\cdot\frac{CL_{out}\cdot\tau}{F}$$

この式に問題文で与えられている数値を代入します。ただし、全身クリアランスの単位が mL/min ですから、投与間隔時間も min に単位を直します。

$$8\ (\mathrm{h}) = 480\ (\mathrm{min})$$
$$D = 2.0\ (\mu\mathrm{g/mL})\cdot\frac{120(\mathrm{mL/min})\cdot480(\mathrm{min})}{0.8}$$

$= \frac{115200}{0.8} = 144000\ (\mu g) = 144\ \ mg$
となります。
したがって、この薬物を含む散剤　(100 mg/g) を用いて、144 mg の薬物を投与するためには、

144 (mg) ÷ 100 (mg/g) = 1.44 g
を投与する必要があます。

問 5–3

問題文に、「1 日 1 回間欠点滴投与」とありますので、投与間隔時間 τ は 24 時間です。また、「半減期は 24 時間」とありますから、投与間隔時間と半減期が等しい $(\tau = t_{1/2})$ 状態で投与していることがわかります。
定常状態におけるピーク値とトラフ値の差（$C_{定常状態}$）を求めるために、ピーク値とトラフ値の比を計算します。

$C_{ss,max} = \frac{C_0}{1-e^{-k_e\tau}}$、$C_{ss,min} = \frac{C_0}{1-e^{-k_e\tau}} \cdot e^{-k_e\tau}$から、

$$\frac{C_{ss,max}}{C_{ss,min}} = \frac{\frac{C_0}{1-e^{-k_e\tau}}}{\frac{C_0}{1-e^{-k_e\tau}} \cdot e^{-k_e\tau}} = \frac{1}{e^{-k_e\tau}} = e^{k_e\tau} \quad \cdots ①$$

k_e と半減期 $(t_{1/2})$ との間には、

$$k_e = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$$

の関係があります。この式を①式に代入します。

$$\frac{C_{ss,max}}{C_{ss,min}} = e^{k_e\tau} = e^{\frac{\ln 2}{t_{1/2}} \cdot \tau}$$

となります。ここで、問題文から、$\tau = t_{1/2}$ですから、

$$\frac{C_{ss,max}}{C_{ss,min}} = e^{k_e\tau} = e^{\frac{\ln 2}{t_{1/2}} \cdot t_{1/2}} = e^{\ln 2} = 2$$

$\boxed{e^{\ln a} = a}$

となります。
ピーク値とトラフ値の比が 2 倍ですから、ピーク値は、トラフ値の 15 μg/mL の 2 倍、すなわち、30 μg/mL となります。
したがって、ピーク値とトラフ値の差は、
30 − 15 = 15　μg/mL です。
問題文から、維持投与量 D は、

$D = (ピーク値 - トラフ値) \times V_d$

で計算できます。分布容積の単位が L/kg ですから、ピーク値とトラフ値の差 15 μg/mL を L 単位に変換し、15 mg/L とします。
したがって、

$D = 15\ (mg/L) \cdot 0.7\ (L/kg) \cdot 70\ (kg)$
$\quad = 735\ \ mg$

問題文では、答を g 単位で要求していますから、維持投与量は、0.735 g となります。

第 6 章　解答

問 6-1

(1) $f(-2) = -2 \cdot (-2)^2 + (-2) + 3$
$\qquad = -8 - 2 + 3 = -7$

$f(2) = -2 \cdot 2^2 + 2 + 3$
$\qquad = -8 + 2 + 3 = -3$

したがって、

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3-(-7)}{2-(-2)} = \frac{4}{4} = 1$

(2) $f(-2) = -7$

$f(-2+h) = -2(-2+h)^2 + (-2+h) + 3$
$\qquad = -8 + 8h - 2h^2 - 2 + h + 3$
$\qquad = -7 + 9h - 2h^2$

したがって、

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-7+9h-2h^2-(-7)}{-2+h-(-2)}$
$\quad = \frac{9h-2h^2}{h} = \frac{h(9-2h)}{h} = 9 - 2h$

問 6-2

(1) $\lim_{h\to 0}(-2 + 5h + 3h^2)$
$\quad = -2 + 5 \cdot 0 + 3 \cdot 0^2 = -2$

(2) $\lim_{x\to -1}(3 - x - 2x^2)$
$\quad = 3 - (-1) - 2 \cdot (-1)^2$
$\quad = 3 + 1 - 2 = 2$

(3) $\lim_{t\to 3}\frac{3t-2}{t^2+t} = \frac{3 \cdot 3-2}{3^2+3} = \frac{9-2}{9+3} = \frac{7}{12}$

(4) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)}$
$\quad = \lim_{x\to 2}(x+2) = 2 + 2 = 4$

(5) $\lim_{h\to 0}\frac{2h-3h^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(2-3h)}{h}$
$\quad = \lim_{h\to 0}(2-3h) = 2 - 3 \cdot 0 = 2$

(6) $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{1+h}-1\right)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{1+h}-\frac{1+h}{1+h}\right)$

$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{1-1-h}{1+h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h(1+h)}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{1+h}=\frac{-1}{1+0}=-1$

問 6-3

(1) $f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-2(1+h)-3-(1^2-2\cdot 1-3)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{1+2h+h^2-2-2h-3-(-4)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{h^2}{h}=\lim_{h\to 0}h=0$

(2) $f'(-2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{-2(-2+h)^2+(-2+h)+3-\{-2\cdot(-2)^2+(-2)+3\}}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{-8+8h-2h^2-2+h+3-(-7)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{9h-2h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(9-2h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}(9-2h)=9-2\cdot 0=9$

問 6-4

(1) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{3(x+h)^2-4(x+h)+1-(3x^2-4x+1)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2+6hx+3h^2-4x-4h+1-3x^2+4x-1}{h}=$

$\lim_{h\to 0}\frac{6hx+3h^2-4h}{h}$

$=\lim_{h\to 0}(6x+3h-4)=6x-4$

(2) $f'(x)=6x-4$から、

$x=-1,-2,-3$を代入し、

$f'(-1)=6\cdot(-1)-4=-10$

$f'(-2)=6\cdot(-2)-4=-16$

$f'(-3)=6\cdot(-3)-4=-22$

問 6-5

(1) $y'=-4\cdot 3x^{3-1}+3\cdot(-2x^{-2-1})+0$

$=-12x^2-6x^{-3}$

(2) $y'=2\cdot\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}-3\cdot\left(-\frac{4}{3}x^{-\frac{4}{3}-1}\right)$

$=x^{-\frac{1}{2}}+4x^{-\frac{7}{3}}$

(3) $y=\frac{1}{x}-\frac{2}{3x^3}=x^{-1}-\frac{2}{3}x^{-3}$ですから、

$y'=-1x^{-1-1}-\frac{2}{3}\cdot(-3)x^{-3-1}$

$=-x^{-2}+2x^{-4}=-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^4}$

問 6-6

(1) $y=\sqrt{x^3}=x^{\frac{3}{2}}$ですから、

$y'=\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$

(2) $y=\frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{4}{x^{\frac{2}{3}}}=4x^{-\frac{2}{3}}$ですから、

$y'=4\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{2}{3}-1}=-\frac{8}{3x^{\frac{5}{3}}}=-\frac{8}{3\sqrt[3]{x^5}}$

(3) $y=4\sqrt[3]{x^4}+\frac{2}{\sqrt{x}}$

$=4x^{\frac{4}{3}}+\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}}=4x^{\frac{4}{3}}+2x^{-\frac{1}{2}}$ですから、

$y'=4\cdot\frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1}+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1}$

$=\frac{16}{3}x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{3}{2}}=\frac{16}{3}\sqrt[3]{x}-\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$

$=\frac{16}{3}\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt{x^3}}$

問 6-7

(1) $y'=(2x+5)'(x-2)+(2x+5)(x-2)'$

$=2(x-2)+(2x+5)\cdot 1$

$=2x-4+2x+5=4x+1$

(2) $y'=(x^2+1)'(2x^2-2x+1)+(x^2+1)(2x^2-2x+1)'$

$=2x(2x^2-2x+1)+(x^2+1)(4x-2)$

$=4x^3-4x^2+2x+4x^3-2x^2+4x-2$

$=8x^3-6x^2+6x-2$

(3) $y'=-\frac{2(x^2+x+1)'}{(x^2+x+1)^2}=-\frac{2(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$

(4) $y'=\frac{(3x-1)'(2x+3)-(3x-1)(2x+3)'}{(2x+3)^2}$

$=\frac{3(2x+3)-(3x-1)\cdot 2}{(2x+3)^2}=\frac{6x+9-6x+2}{(2x+3)^2}$

$=\frac{11}{(2x+3)^2}$

(5) $y'=\frac{(x^2-1)'(x^2+1)-(x^2-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$

$=\frac{2x(x^2+1)-(x^2-1)2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^3+2x-2x^3+2x}{(x^2+1)^2}$

$=\frac{4x}{(x^2+1)^2}$

問 6-8

$y'=2\cdot 3x^2-6\cdot 2x+0$

$=6x^2-12x=6x(x-2)$

したがって、

$x<0,\ x>2$ のとき、

$y'>0$で、yは増加

$0<x<2$ のとき、

$y'<0$で、yは減少

問 6-9

(1) $y' = 2^x \ln 2 + 4(\ln 5)5^x$

(2) $y' = -2 \cdot \frac{1}{x \ln 2} = -\frac{2}{x \ln 2}$

(3) $y' = 3\cos x - 4(-\sin x)$

$= 3\cos x + 4\sin x$

(4) $y' = (x)'\ln x + x(\ln x)' - 1$

$= 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1$

$= \ln x + 1 - 1 = \ln x$

(5) $y' = \frac{(e^x)'x^2 - e^x(x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{e^x x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4}$

$= \frac{xe^x(x-2)}{x^4} = \frac{(x-2)e^x}{x^3}$

(6) $y' = (\sin x)'\cos x + \sin x\,(\cos x)'$

$= \cos x \cos x + \sin x\,(-\sin x)$

$= \cos^2 x - \sin^2 x\ (= \cos 2x)$

問 6-10

(1) $y' = 4.9 \cdot 2t = 9.8t$

(2) $y' = 2e^t$

(3) $y' = -2\cos t$

問 6-11

(1) $u = x^2 + 2x + 2$と置くと、

$y = u^3$となります。

$y = u^3$をuについて微分すると、

$\frac{dy}{du} = 3u^2$、

$u = x^2 + 2x + 2$ をxについて微分すると、

$\frac{du}{dx} = 2x + 2$ から、

$y' = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3u^2(2x + 2)$

$= 3u^2 \cdot 2(x + 1)$

$= 6(x + 1)(x^2 + 2x + 2)^2$

(2) $u = 2x - 5$と置くと、

$y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$となります。

$y = u^{\frac{1}{2}}$をuについて微分すると、

$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2u^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$、

$u = 2x - 5$ をxについて微分すると、

$\frac{du}{dx} = 2$ から、

$y' = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{u}} = \frac{1}{\sqrt{2x-5}}$

(3) $u = -x^2$と置くと、$y = e^u$となります。

$y = e^u$をuについて微分すると、

$\frac{dy}{du} = e^u$、

$u = -x^2$ をxについて微分すると、

$\frac{du}{dx} = -2x$ から、

$y' = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u(-2x) = -2xe^{-x^2}$

(4) $u = x^2 + 1$と置くと、

$y = \ln u$となります。

$y = \ln u$をuについて微分すると、$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u}$、

$u = x^2 + 1$ をxについて微分すると、

$\frac{du}{dx} = 2x$から、

$y' = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+1}$

(5) $u = 3x - \pi$と置くと、

$y = \cos u$となります。

$y = \cos u$をuについて微分すると、

$\frac{dy}{du} = -\sin u$、

$u = 3x - \pi$ をxについて微分すると、

$\frac{du}{dx} = 3$ から、

$y' = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (-\sin u) \cdot 3$

$= -3\sin(3x - \pi)$

(6) $u = 2x + 1$と置くと、

$y = \tan u$となります。

$y = \tan u$をuについて微分すると、

$\frac{dy}{du} = \frac{1}{\cos^2 u}$、

$u = 2x + 1$ をxについて微分すると、

$\frac{du}{dx} = 2$ から、

$y' = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot 2 = \frac{2}{\cos^2(2x+1)}$

問 6-12

(1) $y' = 4 \cdot 5(4x + 3)^{5-1} = 20(4x + 3)^4$

(2) $y' = 2 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(3x + 5)^{-\frac{1}{2}-1}$

$= -3(3x + 5)^{-\frac{3}{2}}$

(3) $y = \frac{1}{3\sqrt{5x+2}} = \frac{1}{3(5x+2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{3}(5x + 2)^{-\frac{1}{2}}$

ですから、

$y' = \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (5x + 2)^{-\frac{1}{2}-1}$

$= -\frac{5}{6}(5x + 2)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{5}{6(5x+2)^{\frac{3}{2}}}$

$= -\frac{5}{6\sqrt{(5x+2)^3}}$

(4) $y' = -\frac{3}{2}(2x^2 + 1)'(2x^2 + 1)^{-\frac{3}{2}-1}$

$= -\frac{3}{2} \cdot 4x(2x^2 + 1)^{-\frac{5}{2}}$

$= -6x(2x^2+1)^{-\frac{5}{2}}$

(5) $y = 4\sqrt{x^3-1} = 4(x^3-1)^{\frac{1}{2}}$ ですから、

$y' = 4\cdot\dfrac{1}{2}\cdot(x^3-1)'(x^3-1)^{\frac{1}{2}-1}$

$= 2\cdot 3x^2(x^3-1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{6x^2}{(x^3-1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{6x^2}{\sqrt{x^3-1}}$

(6) $y = \frac{3}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{3}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}} = 3(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$ ですから、

$y' = 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(x^2+1)'(x^2+1)^{-\frac{1}{2}-1}$

$= 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 2x(x^2+1)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$

$= -\frac{3x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$

問 6-13

(1) $y' = 50(-0.4)e^{-0.4x} = -20e^{-0.4x}$

(2) $y = \sqrt{e^x} = e^{\frac{x}{2}}$より、$y' = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{e^x}$

(3) $y' = \frac{2}{2x+5}$

(4) $y' = (-x^2+3x)'\,e^{-x^2+3x}$

$= (-2x+3)\,e^{-x^2+3x}$

(5) $y' = \frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1} = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$

問 6-14

(1) $y' = 3\cos\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)$

(2) $y' = (-x^2+\pi)'\{-\sin(-x^2+\pi)\}$

$= 2x\sin(-x^2+\pi)$

(3) $y' = 3\cdot 2\cdot\frac{1}{\cos^2(2x+1)} = \frac{6}{\cos^2(2x+1)}$

問 6-15

(1) $y' = (x)'e^{2x} + x(e^{2x})' = 1\cdot e^{2x} + x\cdot 2e^{2x}$

$= (2x+1)e^{2x}$

(2) $y' = 3(\ln x)'(\ln x)^{3-1}$

$= 3\cdot\frac{1}{x}(\ln x)^2 = \frac{3}{x}(\ln x)^2$

(3) $y' = 2(\sin x)'\sin^{2-1}x = 2\cos x\sin x$

> (2)と(3)は
> $\left\{\left(f(x)\right)^n\right\}' = nf'(x)\left(f(x)\right)^{n-1}$

問 6-16

(1) C を y、t を x と考えて微分します。

$\frac{dC}{dt} = 100\cdot(-0.02)e^{-0.02t} = -2e^{-0.02t}$

(2) 少し見づらいですが、α_{Ha} を y、pH を x と考えて微分します。

$\frac{d\alpha_{\mathrm{Ha}}}{d\mathrm{pH}} = -\frac{\left(1+10^{1\cdot\mathrm{pH}-\mathrm{p}Ka}\right)'}{(1+10^{\mathrm{pH}-\mathrm{p}Ka})^2}$

$= -\frac{0+1\cdot 10^{\mathrm{pH}-\mathrm{p}Ka}\ln 10}{(1+10^{\mathrm{pH}-\mathrm{p}Ka})^2}$

$= -\frac{10^{\mathrm{pH}-\mathrm{p}Ka}\ln 10}{(1+10^{\mathrm{pH}-\mathrm{p}Ka})^2}$

問 6-17

(1) $f_x(x,y) = -2\cdot 1 + 0 = -2$

$f_y(x,y) = 0 + 4\cdot 1 = 4$

$dz = -2dx + 4dy$

(2) $z = (x+y)\ln y = x\ln y + y\ln y$

ですから、

y で偏微分するときは、$y\ln y$において積の微分公式を使います。

$f_x(x,y) = 1\cdot\ln y + 0 = \ln y$

$f_y(x,y) = x\cdot\dfrac{1}{y} + (y)'\ln y + y(\ln y)'$

$= \frac{x}{y} + 1\cdot\ln y + y\cdot\frac{1}{y} = \frac{x}{y} + \ln y + 1$

$dz = (\ln y)dx + \left(\frac{x}{y} + \ln y + 1\right)dy$

問 6-18

(1) $f(x,y) = \sqrt{x}\,\sqrt[3]{y^2} = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}$ ですから、

$f_x(x,y) = \dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}y^{\frac{2}{3}} = \dfrac{x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}}{2} = \dfrac{\sqrt[3]{y^2}}{2\sqrt{x}}$

$f_y(x,y) = \dfrac{2}{3}x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}-1} = \dfrac{2}{3}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{2\sqrt{x}}{3\sqrt[3]{y}}$

したがって、$dz = \frac{\sqrt[3]{y^2}}{2\sqrt{x}}dx + \frac{2\sqrt{x}}{3\sqrt[3]{y}}dy$

(2) $(x,y) = (1.01,\ 8.06)$ですから、

$x = 1$、$y = 8$、$dx = 0.01$、$dy = 0.06$

と置くと、

$f(x+dx, y+dy)$

$= f(x,y) + f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy$

$= \sqrt{x}\,\sqrt[3]{y^2} + \frac{\sqrt[3]{y^2}}{2\sqrt{x}}dx + \frac{2\sqrt{x}}{3\sqrt[3]{y}}dy$ に代入して、

$f(1.01, 8.06)$

$= \sqrt{1}\,\sqrt[3]{8^2} + \frac{\sqrt[3]{8^2}}{2\sqrt{1}}\cdot 0.01 + \frac{2\sqrt{1}}{3\sqrt[3]{8}}\cdot 0.06$

$= 4 + \frac{4}{2}\cdot 0.01 + \frac{2}{3\cdot 2}\cdot 0.06$

$= 4 + 2\cdot 0.01 + \frac{1}{3}\cdot 0.06 = 4.04$

第 7 章 解答

問 7-1

C は積分定数とします。

(1) $\displaystyle\int 2x^{-4}dx = 2\cdot\frac{1}{-3}x^{-3} + C$

$\displaystyle = -\frac{2}{3}x^{-3} + C$

(2) $\displaystyle\int \left(x^{-\frac{1}{3}} + 4\right)dx = \frac{1}{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}} + 4x + C$

$\displaystyle = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + 4x + C$

(3) $\displaystyle\int 3\sqrt{x}\,dx = \int 3x^{\frac{1}{2}}dx = 3\cdot\frac{1}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}} + C$

$\displaystyle = 3\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = 2\sqrt{x^3} + C$

(4) $\displaystyle\int \frac{2}{3\sqrt[3]{x^4}}dx = \int \frac{2}{3}x^{-\frac{4}{3}}dx$

$\displaystyle = \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{-\frac{1}{3}}\right)x^{-\frac{1}{3}} + C$

$\displaystyle = -2\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} + C = -\frac{2}{\sqrt[3]{x}} + C$

問 7-2

C は積分定数とします。

(1) $\displaystyle\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$

(2) $\displaystyle\int \ln 5\cdot 5^x\,dx = \ln 5\cdot\frac{5^x}{\ln 5} + C = 5^x + C$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{4x}dx = \frac{1}{4}\ln|x| + C$

(4) $\displaystyle\int \frac{9x^3 - x}{3x^2}dx = \int \left(\frac{9x^3}{3x^2} - \frac{x}{3x^2}\right)dx$

$\displaystyle = \int \left(3x - \frac{1}{3x}\right)dx$

$\displaystyle = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}\ln|x| + C$

(5) $\displaystyle\int \left\{e^x - \left(\frac{1}{e}\right)^x\right\}dx = e^x - \frac{\left(\frac{1}{e}\right)^x}{\ln\frac{1}{e}} + C$

$\displaystyle = e^x - \frac{\left(\frac{1}{e}\right)^x}{\ln 1 - \ln e} + C$

$\displaystyle = e^x - \frac{\left(\frac{1}{e}\right)^x}{0-1} + C$

$\displaystyle = e^x + \left(\frac{1}{e}\right)^x + C$

(6) $\displaystyle\int \frac{3e^{2x} + 2e^x}{e^x}dx = \int \left(\frac{3e^{2x}}{e^x} + \frac{2e^x}{e^x}\right)dx$

$\displaystyle = \int (3e^x + 2)dx$

$\displaystyle = 3e^x + 2x + C$

問 7-3

C は積分定数とします。

(1) $\displaystyle\int (2\sin x - 3\cos x)\,dx$

$= 2(-\cos x) - 3\sin x + C$

$= -2\cos x - 3\sin x + C$

(2) $\displaystyle\int \left(-\frac{5}{3\cos^2 x}\right)dx = -\frac{5}{3}\tan x + C$

問 7-4

C は積分定数とします。

(1) $\displaystyle\int dt \ = t + C$

(2) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right)dt = \int \left(\frac{1}{t} + t^{-2}\right)dt$

$\displaystyle = \ln|t| + \frac{1}{-1}t^{-1} + C$

$\displaystyle = \ln|t| - \frac{1}{t} + C$

(3) $\displaystyle\int 3e^t dt = 3e^t + C$

(4) $\displaystyle\int (-2\sin t)\,dt = -2(-\cos t) + C$

$= 2\cos t + C$

問 7-5

(1) $F(x) = \int F'(x)dx$ですから、

$\displaystyle F(x) = \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \int \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$

$\displaystyle = \frac{1}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{1}x^{\frac{1}{2}} + C$

$\displaystyle = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 2\sqrt{x} + C$ （C は積分定数）

$F(1) = 2$を代入して、

$\displaystyle F(1) = \frac{2}{3}\sqrt{1^3} + 2\sqrt{1} + C = 2$ から、$\displaystyle C = -\frac{2}{3}$

したがって、$\displaystyle F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 2\sqrt{x} - \frac{2}{3}$

(2) $F(x) = \int F'(x)dx$ですから、

$\displaystyle F(x) = \int (e^x + \ln 2\cdot 2^x)\,dx$

$\displaystyle = e^x + \ln 2\cdot\frac{2^x}{\ln 2} + C = e^x + 2^x + C$

（C は積分定数）

$F(0) = 3$を代入して、

$F(0) = e^0 + 2^0 + C \ = 1 + 1 + C = 3$ から、

$C = 1$

したがって、$F(x) = e^x + 2^x + 1$

問 7-6

Cは積分定数とします。

(1) $\int (3x-1)^4 dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4+1}(3x-1)^{4+1}+C$

$= \frac{1}{15}(3x-1)^5+C$

(2) $\int \sqrt{5x+2}dx = \int (5x+2)^{\frac{1}{2}}dx$

$= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(5x+2)^{\frac{1}{2}+1}+C$

$= \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}(5x+2)^{\frac{3}{2}}+C$

$= \frac{2}{15}\sqrt{(5x+2)^3}+C$

(3) $\int \frac{1}{\sqrt{2x-1}}dx = \int (2x-1)^{-\frac{1}{2}}dx$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}(2x-1)^{-\frac{1}{2}+1}+C$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}(2x-1)^{\frac{1}{2}}+C$

$= \sqrt{2x-1}+C$

(4) $\int 10e^{-0.2t}dt = \frac{10}{-0.2}e^{-0.2t}+C$

$= \frac{100}{-2}e^{-0.2t}+C$

$= -50e^{-0.2t}+C$

(5) $\int \sqrt{e^t}\,dt = \int e^{\frac{t}{2}}dt = \frac{1}{\frac{1}{2}}e^{\frac{t}{2}}+C = 2\sqrt{e^t}+C$

(6) $\int (e^x-e^{-x})^2dx = \int (e^{2x}-2+e^{-2x})\,dx$

$= \frac{1}{2}e^{2x}-2x+\frac{1}{-2}e^{-2x}+C$

$= \frac{1}{2}e^{2x}-2x-\frac{1}{2}e^{-2x}+C$

(7) $\int \frac{1}{2x-3}dx = \frac{1}{2}\ln|2x-3|+C$

(8) $\int \frac{2}{1-x}dx = 2\cdot\frac{1}{-1}\ln|1-x|+C$

$= -2\ln|1-x|+C$

(9) $\int \sin(4x+\pi)\,dx = \frac{1}{4}\{-\cos(4x+\pi)\}+C$

$= -\frac{1}{4}\cos(4x+\pi)+C$

(10) $\int 2\cos\left(-x+\frac{\pi}{3}\right)dx$

$= 2\cdot\frac{1}{-1}\sin\left(-x+\frac{\pi}{3}\right)+C$

$= -2\sin\left(-x+\frac{\pi}{3}\right)+C$

(11) $\int \frac{4}{\cos^2 2x}dx = 4\cdot\frac{1}{2}\tan 2x+C$

$= 2\tan 2x+C$

問 7-7

Cは積分定数とします。

(1) $t=x+2$ と置くと、$x=t-2$

tについて微分すると、$\frac{dx}{dt}=1$

変形して、$dx=dt$

したがって、

$\int x(x+2)^4dx = \int (t-2)t^4\,dt$

$= \int (t^5-2t^4)\,dt$

$= \frac{1}{6}t^6-2\cdot\frac{1}{5}t^5+C$

$= \frac{5}{30}t^6-\frac{12}{30}t^5+C$

$= \frac{1}{30}t^5(5t-12)+C$

$= \frac{1}{30}(x+2)^5\{5(x+2)-12\}+C$

$= \frac{1}{30}(x+2)^5(5x-2)+C$

(2) $t=\sqrt{1-x}$と置くと、$t^2=1-x$、変形して、

$x=1-t^2$、tについて微分すると、

$\frac{dx}{dt}=-2t$、変形して、$dx=-2t\,dt$

したがって、

$\int x\sqrt{1-x}dx = (1-t^2)t(-2)t\,dt$

$= -2\int (1-t^2)t^2\,dt$

$= -2\int (t^2-t^4)\,dt$

$= -2\left(\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{5}t^5\right)+C$

$= -2t^3\left(\frac{5}{15}-\frac{3}{15}t^2\right)+C$

$-\frac{2}{15}t^3(5-3t^2)+C$

$= -\frac{2}{15}\left(\sqrt{1-x}\right)^3\{5-3(1-x)\}+C$

$= -\frac{2}{15}(1-x)^{\frac{3}{2}}(3x+2)+C$

別解

$t=1-x$と置くと、$x=1-t$

tについて微分すると、$\frac{dx}{dt}=-1$

変形して、$dx=-dt$

したがって、

$\int x\sqrt{1-x}\,dx = \int (1-t)\sqrt{t}(-1)\,dt$

$= \int (t\sqrt{t}-\sqrt{t})dt$

$= \int \left(t^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{1}{2}}\right)dt$

$= \frac{1}{\frac{5}{2}}t^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{\frac{3}{2}}t^{\frac{3}{2}}+C$

$= \frac{2}{5}t^2\sqrt{t}-\frac{2}{3}t\sqrt{t}+C$

$= \frac{6}{15}t^2\sqrt{t}-\frac{10}{15}t\sqrt{t}+C$

$= \frac{2}{15}t\sqrt{t}(3t-5)+C$
$= \frac{2}{15}(1-x)\sqrt{1-x}\{3(1-x)-5\}+C$
$= \frac{2}{15}(1-x)^{\frac{3}{2}}(-2-3x)+C$
$= -\frac{2}{15}(1-x)^{\frac{3}{2}}(3x+2)+C$

(3) $t=x^2-3$と置き、xについて微分すると、
$\frac{dt}{dx}=2x$、変形して、$2x\,dx=dt$
したがって、
$\int 2x(x^2-3)^2dx=\int t^2dt=\frac{1}{3}t^3+C$
$=\frac{1}{3}(x^2-3)^3+C$

(4) $t=-x^2$と置き、xについて微分すると、
$\frac{dt}{dx}=-2x$、変形して、$2x\,dx=-dt$
したがって、
$\int 2xe^{-x^2}dx=\int e^t(-1)\,dt$
$=\int(-e^t)dt=-e^t+C$
$=-e^{-x^2}+C$

(5) $t=x^2-x+1$と置き、xについて微分すると、$\frac{dt}{dx}=2x-1$、変形して、$(2x-1)\,dx=dt$
したがって、
$\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx=\int\frac{1}{t}dt=\ln|t|+C$
$=\ln|x^2-x+1|+C$
$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$ ですから、
$=\ln(x^2-x+1)+C$

(6) $t=\cos x$と置き、xについて微分すると、
$\frac{dt}{dx}=-\sin x$
変形して、$\sin x\,dx=-dt$
したがって、
$\int\sin x\cos^2x\,dx=(-1)\,dt$
$=-\frac{1}{3}t^3+C=-\frac{1}{3}\cos^3x+C$

問 7-8

Cは積分定数とします。

(1) $\int(4x-3)(2x^2-3x+2)^{-3}dx$
$=\frac{1}{-3+1}(2x^2-3x+2)^{-3+1}+C$
$=-\frac{1}{2}(2x^2-3x+2)^{-2}+C$

(2) $\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx=\int 2x(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\,dx$
$=\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(x^2+1)^{\frac{1}{2}+1}+C$
$=\frac{1}{\frac{3}{2}}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}+C$
$=\frac{2}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}+C$

(3) $\int x^2e^{x^3-1}dx=\int\frac{1}{3}\cdot 3x^2e^{x^3-1}dx$
$=\frac{1}{3}e^{x^3-1}+C$

(4) $\int\frac{x+1}{x^2+2x+4}dx=\int\frac{1}{2}\cdot\frac{2(x+1)}{x^2+2x+4}dx$
$=\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+4|+C$
$x^2+2x+4=(x+1)^2+3>0$ ですから、
$=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+4)+C$

(5) $\int\frac{1}{x}(\ln x)^3dx=\frac{1}{3+1}(\ln x)^{3+1}+C$
$=\frac{1}{4}(\ln x)^4+C$

(6) $\int\cos x\sin^2x\,dx=\frac{1}{2+1}\sin^{2+1}x+C$
$=\frac{1}{3}\sin^3x+C$

問 7-9

Cは積分定数とします。

(1) $\int xe^{2x}dx=x\cdot\frac{1}{2}e^{2x}-\int 1\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\,dx$
$=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{2x}+C$
$=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C$
$=\frac{1}{4}(2x-1)e^{2x}+C$

(2) $\int x^2\ln x dx=\frac{1}{3}x^3\ln x-\int\frac{1}{3}x^3\cdot\frac{1}{x}dx$
$=\frac{1}{3}x^3\ln x-\int\frac{1}{3}x^2\,dx$
$=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}x^3+C$
$=\frac{1}{9}x^3(3\ln x-1)+C$

(3) $\int x\cos x\ dx=x\sin x-\int 1\cdot\sin x\,dx$
$=x\sin x-(-\cos x)+C$
$=x\sin x+\cos x+C$

問 7-10

(1) $\int_{-1}^{2}(3x^3-x)dx$
$=\left[\frac{3}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{2}$
$=\left[\frac{3}{4}x^4\right]_{-1}^{2}-\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{2}$
$=\frac{3}{4}[x^4]_{-1}^{2}-\frac{1}{2}[x^2]_{-1}^{2}$

$= \frac{3}{4}\{2^4 - (-1)^4\} - \frac{1}{2}\{2^2 - (-1)^2\}$

$= \frac{3}{4}(16-1) - \frac{1}{2}(4-1)$

$= \frac{45}{4} - \frac{3}{2} = \frac{39}{4}$

(2) $\displaystyle\int_1^8 \left(2\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) dx$

$= \displaystyle\int_1^8 \left(2x^{\frac{2}{3}} + x^{-\frac{1}{3}}\right) dx$

$= \left[2 \cdot \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}}\right]_1^8$

$= \left[\frac{6}{5} x^{\frac{5}{3}}\right]_1^8 + \left[\frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}}\right]_1^8$

$= \frac{6}{5}\left[x\sqrt[3]{x^2}\right]_1^8 + \frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{x^2}\right]_1^8$

$= \frac{6}{5}\left(8\sqrt[3]{8^2} - 1\sqrt[3]{1^2}\right) + \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{8^2} - \sqrt[3]{1^2}\right)$

$= \frac{6}{5}(32-1) + \frac{3}{2}(4-1)$

$= \frac{186}{5} + \frac{9}{2} = \frac{417}{10}$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (2^x + x^2) dx$

$= \left[\frac{2^x}{\ln 2} + \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1}$

$= \frac{1}{\ln 2}[2^x]_{-1}^{1} + \frac{1}{3}[x^3]_{-1}^{1}$

$= \frac{1}{\ln 2}(2^1 - 2^{-1}) + \frac{1}{3}\{1^3 - (-1)^3\}$

$= \frac{1}{\ln 2}\left(2 - \frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3}$

$= \frac{3}{2\ln 2} + \frac{2}{3}$

(4) $\displaystyle\int_0^1 (e^x + \ln 5 \cdot 5^x) dx = \left[e^x + \frac{\ln 5 \cdot 5^x}{\ln 5}\right]_0^1$

$= [e^x]_0^1 + [5^x]_0^1$

$= e^1 - e^0 + 5^1 - 5^0$

$= e - 1 + 5 - 1$

$= e + 3$

(5) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{2x} dx = \left[\frac{1}{2}\ln x\right]_1^e = \frac{1}{2}[\ln x]_1^e$

$= \frac{1}{2}(\ln e - \ln 1) = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}$

(6) $\displaystyle\int_2^{2e} \frac{-3x+1}{x} dx$

$= \displaystyle\int_2^{2e} \left(-\frac{3x}{x} + \frac{1}{x}\right) dx = \int_2^{2e} \left(-3 + \frac{1}{x}\right) dx$

$= [-3x + \ln x]_2^{2e} = -3[x]_2^{2e} + [\ln x]_2^{2e}$

$= -3(2e - 2) + \ln 2e - \ln 2$

$= -6e + 6 + \ln 2 + \ln e - \ln 2$

$= -6e + 6 + 1 = -6e + 7$

(7) $\displaystyle\int_0^{\pi} (\sin x + \cos x)\, dx$

$= [-\cos x + \sin x]_0^{\pi}$

$= -[\cos x]_0^{\pi} + [\sin x]_0^{\pi}$

$= -(\cos \pi - \cos 0) + \sin \pi - \sin 0$

$= -(-1-1) + 0 - 0 = 2$

(8) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x} = [\tan x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$

$= \tan\frac{\pi}{3} - \tan\frac{\pi}{4} = \sqrt{3} - 1$

問 7-11

(1) $\displaystyle\int_1^2 (3x-2)^{-2} dx = \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{-1}(3x-2)^{-1}\right]_1^2$

$= -\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3x-2}\right]_1^2$

$= -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{1}\right) = \frac{1}{4}$

(2) $\displaystyle\int_{-2}^{0} e^{-0.5x} dx = \left[\frac{1}{-0.5} e^{-0.5x}\right]_{-2}^{0}$

$= -2[e^{-0.5x}]_{-2}^{0}$

$= -2(e^0 - e^1)$

$= 2(e-1)$

(3) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{2x+1} dx = \left[\frac{1}{2}\ln|2x+1|\right]_1^4$

$= \frac{1}{2}[\ln|2x+1|]_1^4$

$= \frac{1}{2}(\ln 9 - \ln 3) = \frac{1}{2}\ln\frac{9}{3}$

$= \frac{1}{2}\ln 3$

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(-x + \frac{\pi}{2}\right) dx$

$= \left[\frac{1}{-1}\left\{-\cos\left(-x + \frac{\pi}{2}\right)\right\}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \left[\cos\left(-x + \frac{\pi}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \cos 0 - \cos\frac{\pi}{2} = 1 - 0 = 1$

問 7-12

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (2x-1)(x^2 - x + 1)^2\, dx$

$= \left[\frac{1}{3}(x^2 - x + 1)^3\right]_{-1}^{1}$

$= \frac{1}{3}[(x^2 - x + 1)^3]_{-1}^{1}$

$= \frac{1}{3}[(1^2 - 1 + 1)^3 - \{(-1)^2 - (-1) + 1\}^3]$

$= \frac{1}{3}(1^3 - 3^3) = -\frac{26}{3}$

(2) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} dx = \int_0^2 \frac{1}{3} \cdot 3x^2 (x^3+1)^{-\frac{1}{2}} dx$

$= \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} (x^3+1)^{-\frac{1}{2}+1}\right]_0^2$

$$=\frac{2}{3}\left[(x^3+1)^{\frac{1}{2}}\right]_0^2$$
$$=\frac{2}{3}\left[\sqrt{x^3+1}\right]_0^2$$
$$=\frac{2}{3}(\sqrt{9}-\sqrt{1})=\frac{4}{3}$$

(3) $$\int_0^1 xe^{-2x^2}\,dx=\int_0^1\frac{1}{-4}\cdot(-4x)e^{-2x^2}\,dx$$
$$=-\frac{1}{4}\left[e^{-2x^2}\right]_0^1$$
$$=-\frac{1}{4}(e^{-2}-e^0)$$
$$=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{e^2}-1\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{e^2}\right)$$

(4) $$\int_1^2\frac{x+1}{x^2+2x+2}dx$$
$$=\int_1^2\frac{1}{2}\cdot\frac{2(x+1)}{x^2+2x+2}dx$$
$$=\frac{1}{2}[\ln(x^2+2x+2)]_1^2$$
$$=\frac{1}{2}\{\ln(2^2+2\cdot2+2)-\ln(1^2+2\cdot1+2)\}$$
$$=\frac{1}{2}(\ln 10-\ln 5)=\frac{1}{2}\ln\frac{10}{5}=\frac{1}{2}\ln 2$$

(5) $$\int_1^e\frac{(\ln x)^3}{x}dx=\int_1^e(\ln x)'\,(\ln x)^3dx$$
$$=\left[\frac{1}{3+1}(\ln x)^{3+1}\right]_1^e$$
$$=\frac{1}{4}[(\ln x)^4]_1^e$$
$$=\frac{1}{4}\{(\ln e)^4-(\ln 1)^4\}$$
$$=\frac{1}{4}(1-0)=\frac{1}{4}$$

(6) $$\int_{-2}^3 x\sin(\pi x^2)\,dx$$
$$=\int_{-2}^3\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi x\sin(\pi x^2)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2\pi}\{-\cos(\pi x^2)\}\right]_{-2}^3$$
$$=-\frac{1}{2\pi}[\cos(\pi x^2)]_{-2}^3$$
$$=-\frac{1}{2\pi}(\cos 9\pi-\cos 4\pi)$$
$$=-\frac{1}{2\pi}(-1-1)=\frac{1}{\pi}$$

問 7-13

(1) $t=x+2$と置き、xについて微分すると、$\frac{dt}{dx}=1$、変形して、$dx=dt$となります。
また、積分区間は下表のように対応します。

x	$-2\to 1$
t	$0\to 3$

したがって、
$$\int_{-2}^1 x(x+2)^4\,dx=\int_0^3(t-2)t^4\,dt$$
$$=\int_0^3(t^5-2t^4)\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{6}t^6-\frac{2}{5}t^5\right]_0^3$$
$$=\frac{1}{6}[t^6]_0^3-\frac{2}{5}[t^5]_0^3$$
$$=\frac{1}{6}(729-0)-\frac{2}{5}(243-0)$$
$$=\frac{243}{2}-\frac{486}{5}=\frac{243}{10}$$

(2) $t=\sqrt{x+1}$と置くと、$t^2=x+1$、変形して、$x=t^2-1$、tについて微分すると、$\frac{dx}{dt}=2t$、変形して、$dx=2\,dt$となります。
また、積分区間は下表のように対応します。

x	$-1\to 0$
t	$0\to 1$

したがって、
$$\int_{-1}^0 x\sqrt{x+1}\,dx=\int_0^1(t^2-1)t\cdot 2t\,dt$$
$$=\int_0^1(2t^4-2t^2)\,dt$$
$$=\left[\frac{2}{5}t^5\right]_0^1-\left[\frac{2}{3}t^3\right]_0^1$$
$$=\frac{2}{5}[t^5]_0^1-\frac{2}{3}[t^3]_0^1$$
$$=\frac{2}{5}(1-0)-\frac{2}{3}(1-0)$$
$$=\frac{6-10}{15}=-\frac{4}{15}$$

別解

$t=x+1$と置き、xについて微分すると、
$\frac{dt}{dx}=1$、変形して、$dx=dt$となります。
また、積分区間は下表のように対応します。

x	$-1\to 0$
t	$0\to 1$

したがって、
$$\int_{-1}^0 x\sqrt{x+1}\,dx=\int_0^1(t-1)\sqrt{t}\,dt$$
$$=\int_0^1\left(t^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{1}{2}}\right)dt$$
$$=\left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$
$$=\frac{2}{5}\left[\sqrt{t^5}\right]_0^1-\frac{2}{3}\left[\sqrt{t^3}\right]_0^1$$
$$=\frac{2}{5}(1-0)-\frac{2}{3}(1-0)$$
$$=-\frac{4}{15}$$

(3) $t=\cos x$と置き、xについて微分すると、$\frac{dt}{dx}=-\sin x$、変形して、$\sin x\,dx=-dt$となります。

また、積分区間は下表のように対応します。

x	$0 \to \frac{\pi}{2}$
t	$1 \to 0$

したがって、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 x - 1)\sin x\,dx = \int_1^0 (t^3 - 1)(-1)\,dt$$
$$= \left[-\frac{1}{4}t^4 + t\right]_1^0$$
$$= -\frac{1}{4}[t^4]_1^0 + [t]_1^0$$
$$= -\frac{1}{4}(0-1) + (0-1)$$
$$= \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$$

(4) $\sqrt{a^2 - x^2}$や$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$の定積分では、

$x = a\sin t$と置きます。

また、$\frac{1}{x^2+a^2}$のときには、$x = a\tan t$と置きます。

この問では、$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{2^2 - x^2}$ですから、

$x = 2\sin t$と置きます。

tについて微分すると、$\frac{dx}{dt} = 2\cos t$、変形して、

$dx = 2\cos t\,dt$となります。

また、積分区間は下表のように対応します。

x	$-2 \to 2$
t	$-\frac{\pi}{2} \to \frac{\pi}{2}$

$$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4 - 4\sin^2 t} = \sqrt{4(1-\sin^2 t)}$$
$$= \sqrt{4\cos^2 t} = 2\cos t \quad (\cos t \geqq 0)$$

と変形できますので、

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t \cdot 2\cos t\,dt$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2 t\,dt$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4 \cdot \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2(1+\cos 2t)\,dt$$
$$= 2\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= 2[t]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + [\sin 2t]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= 2\left\{\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\} + \{\sin\pi - \sin(-\pi)\} = 2\pi$$

半角の公式
$\cos^2\frac{t}{2} = \frac{1+\cos t}{2}$
のtに$2t$をあてはめます。

問 7-14

(1) $\int_0^3 x(x-3)^3\,dx$

$$= \left[x \cdot \frac{1}{4}(x-3)^4\right]_0^3 - \int_0^3 1 \cdot \frac{1}{4}(x-3)^4\,dx$$
$$= 0 - 0 - \left[\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}(x-3)^5\right]_0^3$$
$$= -\frac{1}{20}[(x-3)^5]_0^3 = -\frac{1}{20}\{0 - (-3)^5\}$$
$$= -\frac{243}{20}$$

(2) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\cos x\,dx$

$$= [x\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 1 \cdot \sin x\,dx$$
$$= \pi \cdot \sin\pi - \frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{2} - [-\cos x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$
$$= 0 - \frac{\pi}{2}\cdot 1 + [\cos x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$
$$= -\frac{\pi}{2} + \cos\pi - \cos\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} - 1 - 0$$
$$= -\frac{\pi}{2} - 1$$

(3) $\int_0^1 x^2 e^x\,dx$

$$= [x^2e^x]_0^1 - \int_0^1 2x\,e^x\,dx$$
$$= e - 0 - 2\left\{[xe^x]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot e^x dx\right\}$$
$$= e - 2\{e - 0 - [e^x]_0^1\}$$
$$= e - 2e + 2\{e - 1\} = e - 2$$

問 7-15

(1) $f(x) = 2x^2 - 3$ において、

$f(-x) = 2(-x)^2 - 3 = 2x^2 - 3 = f(x)$

したがって、偶関数

(2) $f(x) = 4x^3 + 2x$ において、

$f(-x) = 4(-x)^3 + 2(-x)$
$\quad = -(4x^3 + 2x) = -f(x)$

したがって、奇関数

(3) $f(x) = 2^x + 2^{-x}$において、

$f(-x) = 2^{-x} + 2^{-(-x)} = 2^{-x} + 2^x = f(x)$

したがって、偶関数

(4) $f(x) = xe^{-x^2}$において、

$f(-x) = -xe^{-(-x)^2} = -xe^{-x^2} = -f(x)$

したがって、奇関数

(5) $f(x) = x^2 + \sin x$において、

$f(-x) = (-x)^2 + \sin(-x) = x^2 - \sin x$

したがって、どちらでもない

(6) $f(x)=x^2\cos x$において、

$f(-x)=(-x)^2\cos(-x)=x^2\cos x=f(x)$

したがって、偶関数

答：偶関数は(1)、(3)、(6)、奇関数は(2)、(4)

問 7-16

(1) 全体では奇関数でも偶関数でもありませんが、x^3+xの部分は奇関数、x^2+1 の部分は偶関数です。分けて積分を計算すれば公式が使えます。

$$\int_{-2}^{2}(x^3+x^2+x+1)dx$$
$$=\int_{-2}^{2}(x^3+x)dx+\int_{-2}^{2}(x^2+1)dx$$
$$=0+2\int_{0}^{2}(x^2+1)dx$$
$$=2\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^2=\frac{2}{3}[x^3]_0^2+2[x]_0^2$$
$$=\frac{2}{3}(8-0)+2(2-0)=\frac{16}{3}+4=\frac{28}{3}$$

(2) $f(x)=\ e^x+e^{-x}$と置くと、

$f(-x)=e^{-x}+e^{-(-x)}=f(x)$から、偶関数です。

したがって、

$$\int_{-3}^{3}(e^x+e^{-x})dx=2\int_{0}^{3}(e^x+e^{-x})\,dx$$
$$=2\left[e^x+\frac{1}{-1}e^{-x}\right]_0^3\ =2\,[e^x]_0^3-2\,[e^{-x}]_0^3$$
$$=2(e^3-e^0)-2(e^{-3}-e^0)$$
$$=2e^3-2-2e^{-3}+2=2e^3-2e^{-3}$$

(3) $f(x)=\ x^2\sin x$ と置くと、

$f(-x)=(-x)^2\sin(-x)=-x^2\sin x=-f(x)$

から、奇関数です。

したがって、

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin x\,dx=0$$

問 7-17

(1) 積分区間の上端が正の無限大までですから、

積分区間を$0\leqq x\leqq h$とし、$h\to\infty$とします。

$$\int_0^{\infty}e^{-2x}\,dx=\lim_{h\to\infty}\int_0^{h}e^{-2x}\,dx$$
$$=\lim_{h\to\infty}\left[\frac{1}{-2}e^{-2x}\right]_0^h$$
$$=\lim_{h\to\infty}\left\{-\frac{1}{2}[e^{-2x}]_0^h\right\}$$
$$=\lim_{h\to\infty}\left\{-\frac{1}{2}(e^{-2h}-e^0)\right\}$$
$$=\lim_{h\to\infty}\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^{2h}}-1\right)\right\}$$
$$=-\frac{1}{2}(0-1)=\frac{1}{2}$$

(2) 積分する関数が積分区間の下端$x=1$で定義されていないので、

積分区間を$h\leqq x\leqq 5$とし、$h\to 1$とします

$$\int_1^5\frac{1}{\sqrt{x-1}}dx=\lim_{h\to 1}\int_h^5(x-1)^{-\frac{1}{2}}dx$$
$$=\lim_{h\to 1}\left[\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}(x-1)^{-\frac{1}{2}+1}\right]_h^5$$
$$=\lim_{h\to 1}2\left[(x-1)^{\frac{1}{2}}\right]_h^5$$
$$=\lim_{h\to 1}2\left[\sqrt{x-1}\right]_h^5$$
$$=\lim_{h\to 1}2\left(\sqrt{4}-\sqrt{h-1}\right)$$
$$=2\left(2-\sqrt{0}\right)=4$$

問 7–18

全身クリアランス$CL_{tot}=\frac{D_{iv}}{AUC}$に、問題文の静脈投与量 60 mg、AUC 2.0 mg·h/L を代入します。

全身クリアランス$CL_{tot}=\frac{60}{2.0}=30$ L/h

問 7–19

全身クリアランス$CL_{tot}=\frac{D_{iv}}{AUC}$に、問題文の静脈投与量 100 mg、AUC 90 μg·min/mL を代入します。

AUC の単位を mg·min/L に変換すると、

90 mg·min/L になります。

$CL_{tot}=\frac{100}{90}=1.1$ L/min

分布容積 $v_d=\frac{CL_{tot}}{k_e}$に、全身クリアランスの 1.1 L/min と消失速度定数 0.05 min^{-1} を代入します。

$v_d=\frac{1.1}{0.05}=22$ L

国試問題にチャレンジ

問 7–1

点滴静注では、定常状態において、

$$投与速度k_0 = CL_{tot} \cdot C_{ss} \quad \cdots ①$$

が成り立ちます。

ここで、C_{ss} = 定常状態における血中濃度、

CL_{tot} = 全身クリアランスを表します。

問題文に「全身クリアランスが 40 L/h である薬物を点滴静注し、定常状態における血中濃度を 0.50 mg/L にしたい」とありますので、$C_{ss} = 0.50$ mg/L、$CL_{tot} = 40$ L/hを①式に代入します。

$$投与速度k_0 = 0.50\ (\text{mg/L}) \cdot 40\ (\text{L/h}) = 20\ \text{mg/h}$$

問 7–2

全身クリアランスは、

$$CL_{tot} = \frac{D_{iv}}{AUC} \quad \cdots ②$$

から求められます。

ここで、D_{iv} = 静脈内投与量、

AUC = 薬物血中濃度時間曲線下面積を表します。

問題文に「薬物 10 mg を急速静脈内投与、薬物血中濃度時間曲線下面積は 0.20 mg·h/L」と、ありますので、

$D_{iv} = 10$ (mg)、$AUC = 0.20$ (mg · h/L) を②式に代入します。

$$全身クリアランスCL_{tot} = \frac{10\ (\text{mg})}{0.20\ (\text{mg·h/L})} = 50\ \text{L/h}$$

問 7–3

問題文に「体内動態が線形 1–コンパートメントモデルに従う」とありますので、全身クリアランスCL_{tot}は、

$$CL_{tot} = k_e \cdot \frac{D_{iv}}{C_0} \quad \cdots ③$$

から求められます。

問題文に「薬物 100 mg を急速静脈内投与したとき、投与直後の血中濃度が 2 mg/L，消失速度定数が 0.1 h^{-1} であった」と、ありますので、

$D_{iv} = 100$ (mg)、$C_0 = 2$ (mg/L)、$k_e = 0.1$ (h^{-1}) を③式に代入します。

$$CL_{tot} = 0.1\ (\text{h}^{-1}) \cdot \frac{100\ (\text{mg})}{2\ (\text{mg/L})} = 5\ \text{L/h}$$

問 7–4

問題文から、静脈投与量D_{iv}と薬物血中濃度時間曲線下面積 AUC がわかっていますので、

全身クリアランスは、

$$CL_{tot} = \frac{D_{iv}}{AUC} \quad \cdots ④$$

から求められます。

$D_{iv} = 100$ (mg)、$AUC = 1.0$ (mg · h/L) を④式に代入します。

$$CL_{tot} = \frac{100\ (\text{mg})}{1.0\ (\text{mg·h/L})} = 100\ \text{L/h}$$

問 7–5

問題文から、静脈投与量D_{iv}と血中濃度C_{ss}、消失速度定数k_eがわかっていますので、

全身クリアランスは、

$$CL_{tot} = k_e \cdot \frac{D_{iv}}{C_0} \quad \cdots ⑤$$

から求められます。

$D_{iv} = 1000$ (mg)、$C_0 = 100$ (μg/mL)、

$k_e = 0.23$ (h^{-1}) を⑤式に代入します。

単位を揃えるために、C_0を mL から L に変換し、$C_0 = 100$ (mg/L) とし、計算します。

$$CL_{tot} = 0.23\ (\text{h}^{-1}) \cdot \frac{1000\ (\text{mg})}{100\ (\text{mg/L})} = 2.3\ \text{L/h}$$

問 7–6

平均滞留時間は、

$$MRT = \frac{AUMC}{AUC} \quad \cdots ⑥$$

から求められます。

問題文に「粉末製剤あるいは液剤として経口投与した後の血中濃度時間曲線下面積 (AUC) は等しく、1500 μg·h/L であった」と、ありますので、

$AUC = 1500$ (μg·h/L) です。

また、「血中濃度に関する 1 次モーメント時間曲線下面積 (AUMC) は、粉末製剤の場合が

9000 μg·h²/L、液剤の場合が 7500 μg·h²/L であった」と、ありますので、

$AUMC_{粉末} = 9000\ (\mu g{\cdot}h^2/L)$、

$AUMC_{液剤} = 7500\ (\mu g{\cdot}h^2/L)$です。

これらの数値を⑥式に代入します。

$MRT_{粉末} = \frac{AUMC}{AUC} = \frac{9000\ (\mu g{\cdot}h^2/L)}{1500\ (\mu g{\cdot}h/L)} = 6\ \ h$

$MRT_{液剤} = \frac{AUMC}{AUC} = \frac{7500\ (\mu g{\cdot}h^2/L)}{1500\ (\mu g{\cdot}h/L)} = 5\ \ h$

問 7–7

問題文に「経口投与し、24 時間採血を行った際の血中濃度時間曲線下面積 (AUC 0→∞) は 120 μg·h/L、一次モーメント曲線下面積 (AUMC 0→∞) は 1320 μg·h²/L であった」と、ありますので、$AUC = 120\ (\mu g{\cdot}h/L)$、

$AUMC = 1320\ (\mu g{\cdot}h^2/L)$を

平均滞留時間$MRT = \frac{AUMC}{AUC}$

に代入します。

$MRT = \frac{1320\ (\mu g{\cdot}h^2/L)}{120\ (\mu g{\cdot}h/L)} = 11\ \ h$

第 8 章 解答

問 8–1

(1) 導関数が$2e^{-0.1x}$ですから、

一般解はxについて積分して、

$$y = \int 2e^{-0.1x}\,dx = 2\cdot\frac{1}{-0.1}e^{-0.1x} + C$$

$$= -20e^{-0.1x} + C \quad (C\ は任意定数)$$

(2) 導関数が$\frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}$ですから、

一般解はxについて積分して、

$$y = \int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}dx = \int \frac{2\sin x\cos x}{1+\sin^2 x}dx$$

ここで、$t = \sin x$と置き、xについて微分すると、$\frac{dt}{dx} = \cos x$、変形して、$\cos x\,dx = dt$

したがって、一般解は、

$$y = \int \frac{2\sin x\cos x}{1+\sin^2 x}dx = \int \frac{2t}{1+t^2}dt$$

$$= \ln(1+t^2) + C = \ln(1+sin^2 x) + C$$

一般解に、初期条件$x = 0$、$y = 1$を代入すると、

$1 = \ln(1+\sin^2 0) + C$ となります。

これから、$C = 1$

したがって、

特殊解は、$y = \ln(1+\sin^2 x) + 1$

問 8–2

(1) $-\frac{dy}{dx} = y$ の両辺に$-\frac{dx}{y}$をかけ、

$\frac{1}{y}dy = -dx$ と変形します。

両辺を積分すると、

$$\int \frac{1}{y}dy = \int (-1)dx$$

$\ln|y| = -x + C$

となります。したがって、

$|y| = e^{-x+C} = e^C e^{-x}$

となります。

±をつけて絶対値をとると、

$y = \pm e^C e^{-x}$

$\pm e^C$をあらためてCに置き直すと、

求める一般解は、

$y = Ce^{-x}$ （Cは任意定数）

(2) $\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = -3x^2$ の両辺に dx をかけ、

$\frac{1}{y}dy = -3x^2 dx$

と変形します。

両辺を積分すると、

$$\int \frac{1}{y}dy = \int (-3x^2)dx$$

$\ln|y| = -x^3 + C$

となります。したがって、

$|y| = e^{-x^3+C} = e^C e^{-x^3}$

±をつけて絶対値をとると、

$y = \pm e^C e^{-x^3}$

$\pm e^C$をあらためてCに置き直すと、

求める一般解は、

$y = Ce^{-x^3}$ （Cは任意定数）

(3) $2y\cdot\frac{dy}{dx} = x$の両辺に$\frac{dx}{2}$をかけ、

$ydy = \frac{1}{2}xdx$と変形します。

両辺を積分すると、

$$\int ydy = \int \frac{1}{2}xdx$$

$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{4}x^2 + C$

となります。

両辺を 2 倍して整理すると、$\frac{x^2}{2}-y^2=-2C$
$-2C$をあらためてCに置き直すと、
求める一般解は、
$\frac{x^2}{2}-y^2=C$ （Cは任意定数）
(4) $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{x^2}$の両辺に$\frac{dx}{y^2}$をかけ、
$\frac{1}{y^2}dy=\frac{1}{x^2}dx$と変形します。
両辺を積分すると、
$\int\frac{1}{y^2}dy=\int\frac{1}{x^2}dx$、
$\frac{1}{-1}y^{-1}=\frac{1}{-1}x^{-1}+C$
となります。したがって、
$-\frac{1}{y}=-\frac{1}{x}+C$
これを整理すると、$\frac{1}{y}=\frac{1}{x}-C=\frac{1-Cx}{x}$
したがって、求める一般解は、
$y=\frac{x}{1-Cx}$ （Cは任意定数）
(5) $\frac{1}{x(y+2)}\cdot\frac{dy}{dx}=-2$の両辺に$x\,dx$をかけ、
$$\frac{1}{y+2}dy=-2xdx$$
と変形します
両辺を積分すると、
$\int\frac{1}{y+2}dy=\int(-2x)dx$、
$\ln|y+2|=-x^2+C$
となります。したがって、
$|y+2|=e^{-x^2+C}=e^Ce^{-x^2}$
$\pm$をつけて絶対値をとると、
$y+2=\pm e^Ce^{-x^2}$
$\pm e^C$をあらためてCに置き直すと、
求める一般解は、
$y=Ce^{-x^2}-2$ （Cは任意定数）
(6) $(x+1)\frac{dy}{dx}=2-y$の両辺に$\frac{dx}{(x+1)(2-y)}$をかけ、
$\frac{1}{2-y}dy=\frac{1}{x+1}dx$
と変形します。
両辺を積分すると、
$$\int\frac{1}{2-y}dy=\int\frac{1}{x+1}dx$$
$\frac{1}{-1}\ln|2-y|=\ln|x+1|+C$
（左辺のyの係数-1に注意）
となります。したがって、
$\ln|2-y|+\ln|x+1|=-C$
$\ln$の 2 項をまとめて、
$\ln|(2-y)(x+1)|=-C$
指数の式に直すと、
$|(2-y)(x+1)|=e^{-C}$
$\pm$をつけて絶対値をとると、
$(y-2)(x+1)=\pm e^{-C}$
$\pm e^{-C}$をCに置き直して、
$(y-2)(x+1)=C$
これを整理すると、一般解は、
$y=\frac{C}{x+1}+2$ （Cは任意定数）
(7) $-\frac{dy}{dx}=3y^2$の両辺に$-\frac{dx}{y^2}$をかけ、
$\frac{1}{y^2}dy=-3dx$ と変形します。
両辺を積分すると、
$$\int\frac{1}{y^2}dy=\int(-3)dx$$
$\frac{1}{-1}y^{-1}=-3x+C$
となります。したがって、
$-\frac{1}{y}=-3x+C$
これを整理すると、$\frac{1}{y}=3x-C$
したがって、一般解は、
$y=\frac{1}{3x-C}$ （Cは任意定数）
初期条件$x=0$のとき、$y=1$を代入し、
$1=\frac{1}{0-C}$から、$C=-1$
したがって、求める特殊解は、
$y=\frac{1}{3x+1}$
(8) $y'-3y=-2xy$の$-3y$を右辺に移行して、
因数分解すると、
$y'=y(-2x+3)$
y'を$\frac{dy}{dx}$に置き換え、両辺に$\frac{dx}{y}$をかけ、
$\frac{1}{y}dy=(-2x+3)dx$
と変形します。
$\frac{1}{y}dy=(-2x+3)dx$の両辺を積分すると、
$$\int\frac{1}{y}dy=\int(-2x+3)dx$$
$\ln|y|=-x^2+3x+C$
となります。指数の式に直し、
$|y|=e^{-x^2+3x+C}$
$\pm$をつけて絶対値をとると、

$y=\pm e^{-x^2+3x+C}=\pm e^{C}e^{-x^2+3x}$
$\pm e^{C}$をあらためてCに置き直すと、
一般解は、
$y=Ce^{-x^2+3x}$　　（Cは任意定数）
初期条件$x=1$のとき、$y=3e^2$を代入し、
$3e^2=Ce^{-1+3}$ から、$C=3$
したがって、求める特殊解は、
$y=3e^{-x^2+3x}$

問 8–3

(1) $xy'+y=3x^2+1$において、
左辺$=xy'+(x)'y=(xy)'$
したがって、$(xy)'=3x^2+1$となります。
両辺を積分すると、左辺はxyを微分して積分することになるので、xyのままとなります。
したがって、$xy=\int(3x^2+1)\,dx=x^3+x+C$
となります。
両辺をxで割り、一般解は、
$y=x^2+1+\frac{C}{x}$　　（Cは任意定数）
(2) $y'+2y=3e^x+e^{-x}$において、
$F(x)=\int 2dx=2x$ と置くと、
$e^{F(x)}=e^{2x}, e^{-F(x)}=e^{-2x}$ が得られます。
したがって、一般解は、
$$y=e^{-2x}\left\{\int(3e^x+e^{-x})e^{2x}dx+C\right\}$$
$$=e^{-2x}\left\{\int(3e^{3x}+e^x)dx+C\right\}$$
$$=e^{-2x}(e^{3x}+e^x+C)$$
$$=e^x+e^{-x}+e^{-2x}C$$
$$=e^x+\frac{1}{e^x}+\frac{C}{e^{2x}}$$　　（Cは任意定数）
(3) $xy'-y=2x^3$において、両辺をxで割ると、
$y'-\frac{1}{x}y=2x^2$
$F(x)=\int\left(-\frac{1}{x}\right)dx=-\ln x$ と置くと、
$e^{F(x)}=e^{-\ln x}=e^{\ln x^{-1}}=e^{\ln\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}$
$e^{-F(x)}=\frac{1}{e^{F(x)}}=x$
が得られます。
したがって、一般解は、
$$y=x\left(\int 2x^2\cdot\frac{1}{x}dx+C\right)$$
$$=x\left(\int 2xdx+C\right)=x(x^2+C)$$
$$=x^3+Cx$$　　（Cは任意定数）
初期条件、$x=1$、$y=3$を代入して、
$3=1+C$
これから、$C=2$
したがって、特殊解は、
$y=x^3+2x$
(4) $y'+2xy=2x$において、
$F(x)=\int 2xdx=x^2$と置くと、
$e^{F(x)}=e^{x^2}, e^{-F(x)}=e^{-x^2}$
が得られます。
したがって、一般解は、
$$y=e^{-x^2}\left(\int 2xe^{x^2}dx+C\right)$$
$$=e^{-x^2}\left(e^{x^2}+C\right)$$
$$=1+Ce^{-x^2}$$　（Cは任意定数）
(5) $y'-4y=8$ において、
$F(x)=\int(-4)dx=-4x$と置くと、
$e^{F(x)}=e^{-4x}, e^{-F(x)}=e^{4x}$
が得られます。
したがって、一般解は、
$$y=e^{4x}\left(\int 8e^{-4x}dx+C\right)$$
$$=e^{4x}\left(8\cdot\frac{1}{-4}e^{-4x}+C\right)$$
$$=e^{4x}(-2e^{-4x}+C)$$
$$=-2+Ce^{4x}$$　（Cは任意定数）
一般解に初期条件、$x=0$、$y=0$を代入して、
$0=-2+C$
これから、
$C=2$
したがって、特殊解は、
$y=2e^{4x}-2$
(6) $y'+(\cos x)y=\cos x$において、
$F(x)=\int\cos x\,dx=\sin x$ と置くと、
$e^{F(x)}=e^{\sin x}, e^{-F(x)}=e^{-\sin x}$
が得られます。
したがって、一般解は、
$$y=e^{-\sin x}\left(\int\cos x\,e^{\sin x}dx+C\right)$$
$$=e^{-\sin x}\left(e^{\sin x}+C\right)$$
$$=1+Ce^{-\sin x}$$　　（Cは任意定数）

初期条件、$x = 0$、$y = 2$を代入して、

$2 = 1 + Ce^{-\sin 0} = 1 + Ce^{0} = 1 + C$

これから、$C = 1$

したがって、特殊解は、

$y = 1 + e^{-\sin x}$

問 8–4

ア：正しい。1 次反応です。$\ln C = -k_e t + \ln C_0$ で表せます。

イ：誤り。2 次反応です。$\frac{1}{C} = k_e t + \frac{1}{C_0}$で表せます。

ウ：誤り。0 次反応です。$C = -k_e t + C_0$で表せます。

答：ア

問 8–5

2 次反応の半減期（$t_{1/2}$）は次式で表される。

$t_{1/2} = \frac{1}{k_e C_0}$　$\cdots$ ①

が成立します。ただし、C₀：反応物の初濃度、k_e：反応速度定数です。

問題文に「A の初濃度が 0.2 mol/L のとき、20 秒で 50 %が分解した」とあるので、①式に、$t_{1/2} = 20$ s、$C_0 = 0.2$ mol/L を代入すると、

$20 = \frac{1}{0.2k_e}$

k_eの式に変形します。

$k_e = \frac{1}{0.2 \cdot 20} = \frac{1}{4} = 0.25$ L·mol⁻¹·s⁻¹

問 8–6

(1) 分解は 1 次反応に従っています。

(2) 初濃度 40 mg/dL の縦軸の値は 1.6 です。初濃度の半分となる 10 mg/dL での縦軸の値は、$\log 10 = 1$です。

縦軸の値が 1.6 から 1.0 になるのに 6 時間かっています。

濃度 C が初濃度の 40 mg/mL から 10 mg/mL になるのに 6 時間だとわかる。

濃度が$\frac{1}{4}$ですから、半減期を 2 回迎えたことになります。

したがって、半減期は 3 時間です。

(3) $t_{1/2} = \frac{0.693}{k}$から、$k_e$式に変形します。

$k_e = \frac{0.693}{3} = 0.231 \ \mathrm{h^{-1}}$

(4) 薬物 A の分解は一次反応に従うことから、時間と濃度の常用対数の関係式として、

$\log C = -\frac{k_e t}{2.303} + \log C_0$　$\cdots$ ①

が成り立ちます。

①式に、$k_e = 0.231 \ \mathrm{h^{-1}}$、$t = 20$ h を代入します。

$\log C = -\frac{0.231 \cdot 20}{2.303} + \log C_0 \fallingdotseq -2 + \log C_0$

式を変形して、

$\log C - \log C_0 = -2$

$\log \frac{C}{C_0} = -2$

$\frac{C}{C_0} = 10^{-2} = \frac{1}{100}$

$\boxed{10^p = M \Leftrightarrow p = \log M}$

したがって、反応開始から 20 時間後には、薬物 A の濃度は初期濃度の 1/100 になります。つまり、1 %が残り、99 %が分解されたことになります。したがって、分解する割合は、99 % となります。

問 8–7

問題のグラフから、薬物の半減期$t_{1/2}$は、2 時間、投与直後濃度$C_0 = 10$ μg/mL であることが読み取れます。したがって、消失速度定数k_eは、

$k_e = \frac{\ln 2}{2} = \frac{0.693}{2} = 0.3465 \ \mathrm{h^{-1}}$

となります。

次に、分布容積V_dを求めます。

ここで、投与直後濃度$C_0 = 10$ μg/mLですので、これを L 単位に変換し、10 μg/mL = 10 mg/L とします。

$V_d = \frac{100 \ (\mathrm{mg})}{10 \ (\mathrm{mg/L})} = 10 \ \mathrm{L}$

以上から、全身クリアランスCL_{tot}を求めることができます。

$CL_{tot} = k_e \cdot V_d = k_e \cdot \frac{D_{iv}}{C_0}$から、

$CL_{tot} = 0.3465 \ (\mathrm{h^{-1}}) \cdot 10 \ (\mathrm{L}) = 3.465 \ \mathrm{L/h}$

点滴静注ですので、薬物の定速静脈内投与速度k_0から、定常状態血中濃度C_{ss}を求めます。

$k_0 = CL_{tot} \cdot C_{ss}$から、$C_{ss}$の式に変形して、

$C_{ss} = \frac{k_0}{CL_{tot}}$

となります。

したがって、この薬物を 50 mg/h の速度で定速静注するとき、定常状態の血中濃度C_{ss}は、

$C_{ss} = \frac{50\ (\mathrm{mg/h})}{3.465\ (\mathrm{L/h})} \fallingdotseq 14.4\ (\mathrm{mg/L}) = 14.4\ (\mu\mathrm{g/mL})$

となります。

この薬物の半減期$t_{1/2}$が 2 時間ですから、投与開始 2 時間後の血中薬物濃度 C は、定常状態の血中薬物濃度C_{ss}の 1/2 になります。

したがって、2 時間後の血中濃度Cは、

$C = \frac{1}{2} \cdot 14.4 = 7.2\ \ (\mu\mathrm{g/mL})$

となります。

国試問題にチャレンジ

問 8–1

この問題で与えられているのが常用対数ですから、常用対数型の 1 次反応式

$\log C = \frac{k_e t}{2.303} + \log C_0 \quad \cdots ①$

を利用して計算します。

問題文に、「ある液剤を 25 ℃で保存すると、1 次速度式に従って分解し、100 時間後に薬物含量が 96.0 %に低下していた」とありましたので、初濃度をC_0として、①式に、$t = 100$、$C = 0.96C_0$をそれぞれ代入します。

$\log 0.96C_0 = \log C_0 - \frac{100k_e}{2.303}$

変形して、

$\frac{100k_e}{2.303} = \log C_0 - \log C_0 = \log \frac{C_0}{0.96C_0} = \log \frac{100}{96}$

$= \log 100 - \log(32 \cdot 3)$

$\boxed{\log_a MN = \log_a M + \log_a N}$

$= 2 - \log(2^3 \cdot 3) = 2 - (\log 2^5 + \log 3)$

$= 2 - 5\log 2 - \log 3$

$= 2 - 5 \cdot 0.301 - 0.477$

$= 0.018$

反応速度定数k_eの式に変形すると、

$k_e = 0.018 \cdot \frac{2.303}{100} = 0.00041454$

$= 4.15 \times 10^{-4}\ \ \mathrm{h}^{-1}$

となります。上記で求めたk_eを用いて、薬物含量が 100 %から 90.0%になるのに要する時間を計算します。

$\log 0.9C_0 = \log C_0 - \frac{4.15\times10^{-4}t}{2.303}$

変形して、

$\frac{4.15\times10^{-4}t}{2.303} = \log C_0 - \log 0.9C_0 = \log \frac{C_0}{0.9C_0}$

$= \log \frac{10}{9} = \log 10 - \log 9$

$= 1 - \log 3^2 = 1 - 2\log 3$

$= 1 - 2 \cdot 0.477 = 0.046$

時間 t の式に変形すると、

$t = 0.046 \cdot \frac{2.303}{4.15\times10^{-4}} = 0.02553 \times 10^4$

$= 255.3\ \ \mathrm{h}$

問題文では、日数が問われていますから、

$t = \frac{255.3}{24} = 10.6475 \fallingdotseq 10$日

有効期間ですので、得られた数値は四捨五入せず、切り捨てます。

問 8–2

問題文に「投与直後の血中濃度は 40 μg/mL、投与 6 時間後の血中濃度は 5 μg/mL であった」とありますから、6 時間後に$\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$になっています。

したがって、半減期$t_{1/2} = 2$時間となります。

消失速度定数$k_e = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$から、

$k_e = \frac{\ln 2}{2} = \frac{0.693}{2} = 0.3465\ \mathrm{h}^{-1}$

となります。

問 8–3

$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k_e}$を$k_e$の式に変形します。

$k_e = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$を下の 1 次反応式に代入します。

$\ln C = -k_e t + \ln C_0 = -\frac{\ln 2}{t_{1/2}} \cdot t + \ln C_0 \quad \cdots ①$

問題文から、「投与直後の血中濃度（C₀）が 20 μg/mL」、「投与 2 時間後の血中濃度が 4 μg/mL」とあるため、①式を用いて半減期（$t_{1/2}$）を求めます。

$\ln 4 = -\frac{\ln 2}{t_{1/2}} \cdot 2 + \ln 20$

$t_{1/2}$の式に変形します。

$t_{1/2} = \frac{2\cdot\ln 2}{\ln 20-\ln 4} = \frac{2\cdot 0.693}{\ln\frac{20}{4}} = \frac{1.386}{\ln 5} = \frac{1.386}{1.61}$

$= 0.861\ \mathrm{h}$

したがって、定常状態に達するまでの点滴時間（消失半減期の 5 倍）は、

$5\cdot t_{1/2} = 5\cdot 0.861 = 4.305\ \mathrm{h}$

となります。

問 8–4

問題文に「薬物 1.5 g を水 10 mL に懸濁させた」とありますから、薬物 A の初期の全薬物濃度は、15 g/100 mL、すなわち、15 w/v%となります。

溶解速度が分解速度に比べて十分に速く、かつ、初期の全薬物濃度 15 w/v%＞溶解度 5 w/v%ですから、全薬物濃度 C が溶解度C_sに達するまでは、みかけ上 0 次反応で反応が進行します。

みかけ上 0 次反応で進行するときの速度定数k_0は、

$k_0 = k_1\cdot C_0$

で表せます。ここで、k_1 = 1 次反応の速度定数、C_0 = 初期の反応物の濃度です。

問題文の値を代入し、

$k_0 = 0.02\ (\mathrm{h^{-1}})\cdot 5\ (\mathrm{w/v\%}) = 0.10\ \mathrm{w/v\%\cdot h^{-1}}$

となります。

残存率が 90%（全薬物濃度が 13.5 w/v%）に達するまでの時間 t は、

$C = -k_e t + C_0$から、

$13.5 = -0.10t + 15$

t の式に変形して、

$0.10t = 15 - 13.5 = 1.5$

$t = \frac{1.5}{0.10} = 15\ \mathrm{h}$

問 8–5

最終的な A と B の濃度比は平衡定数 K に依存することになります。

$\frac{[B]}{[A]} = \frac{k_1}{k_{-1}} = K$

ここで、[A] = 平衡状態における A の濃度、[B] = 平衡状態における B の濃度を表します。

問題文から、

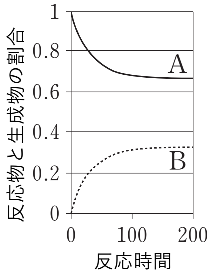
$\frac{[B]}{[A]} = \frac{0.01\ (\mathrm{min^{-1}})}{0.02\ (\mathrm{min^{-1}})}$

ですので、

$[A]:[B] = 0.02:0.01 = 2:1 = 0.67:0.33$

となります。

反応物 A と生成物 B の時間的割合の変化は右図のようになります。



第 9 章解答

問 9–1

(1) $3\vec{a} + 5\vec{b} - 2\vec{a} + 3\vec{b} = \vec{a} + 8\vec{b}$

(2) $-(4\vec{a} + 3\vec{b}) + 2(\vec{a} - \vec{b})$

$= -4\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{a} - 2\vec{b} = -2\vec{a} - 5\vec{b}$

(3) $2(\vec{a} + 2\vec{b}) - 3(\vec{a} - \vec{b})$

$= 2\vec{a} + 4\vec{b} - 3\vec{a} + 3\vec{b} = -\vec{a} + 7\vec{b}$

(4) $\frac{1}{2}(2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}) + \frac{1}{6}(4\vec{a} + 3\vec{b} - 3\vec{c})$

$= \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{3}{2}\vec{c} + \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c} = \frac{5}{3}\vec{a} + \vec{c}$

問 9–2

(1) $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$

$= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BH}$

$\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} - \overrightarrow{AB} = \vec{b} + \vec{c} - \vec{a}$

ですから、

$\overrightarrow{AI} = \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c} - \vec{a})$

$= \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

(2) (1)から、$\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AI}$ ですから、

3 点 A、I、G は同一直線上にあります。

問 9–3

$\vec{a}$は、始点からx軸方向、y軸方向にそれぞれ 3、3 進むと、終点になるので、
$\vec{a}=(3,3)$ となります。
また、大きさは、
$|\vec{a}|=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2}$
となります。
$\vec{b}$は、始点からx軸方向、y軸方向にそれぞれ-2、0 進むと、終点になるので、
$\vec{b}=(-2,0)$ となります。
また、大きさは、
$|\vec{b}|=\sqrt{(-2)^2+0^2}=\sqrt{4+0}=2$
となります。
$\vec{c}$は、始点からx軸方向、y軸方向にそれぞれ0、3 進むと、終点になるので、
$\vec{c}=(0,3)$ となります。
また、大きさは、
$|\vec{c}|=\sqrt{0^2+3^2}=\sqrt{0+9}=3$
となります。
$\vec{d}$は、始点からx軸方向、y軸方向にそれぞれ 2、-4進むと、終点になるので、
$\vec{d}=(2,-4)$ となります。
また、大きさは、
$|\vec{d}|=\sqrt{2^2+(-4)^2}=\sqrt{4+16}=2\sqrt{5}$
となります。

問 9–4

(1) $\vec{a}+\vec{b}=(-1,3)+(-2,4)$
$=(-1-2,3+4)=(-3,7)$
(2) $\vec{a}-\vec{b}=(-1,3)-(-2,4)$
$=(-1-(-2),3-4)=(1,-1)$
(3) $-2\vec{b}=(-2\cdot(-2),-2\cdot 4)=(4,-8)$
(4) $3\vec{a}-4\vec{b}=3(-1,3)-4(-2,4)$
$=(3\cdot(-1),3\cdot 3)-(4\cdot(-2),4\cdot 4)$
$=(-3,9)-(-8,16)$
$=(-3-(-8),9-16)=(5,-7)$
(5) $2(2\vec{a}-3\vec{b})+3(-2\vec{a}+\vec{b})$
$=4\vec{a}-6\vec{b}-6\vec{a}+3\vec{b}=-2\vec{a}-3\vec{b}$
$=-2(-1,3)-3(-2,4)$
$=(-2\cdot(-1),-2\cdot 3)-(3\cdot(-2),3\cdot 4)$
$=(2,-6)-(-6,12)$
$=(2-(-6),-6-12)=(8,-18)$

問 9–5

(1) $3\vec{a}+2\vec{b}$
$=3(3,0,-2)+2(1,-3,4)$
$=\left(3\cdot 3,3\cdot 0,3\cdot(-2)\right)+(2\cdot 1,2\cdot(-3),2\cdot 4)$
$=(9,0,-6)+\ (2,-6,8)$
$=(9+2,0-6,-6+8)$
$=(11,-6,2)$
(2) $4\vec{a}-3\vec{b}$
$=4(3,0,-2)-3(1,-3,4)$
$=\left(4\cdot 3,4\cdot 0,4\cdot(-2)\right)-(3\cdot 1,3\cdot(-3),3\cdot 4)$
$=(12,0,-8)-\ (3,-9,12)$
$=(12-3,0-(-9),-8-12)$
$=(9,9,-20)$
(3) $3(\vec{a}-2\vec{b})-2(3\vec{a}-\vec{b})$
$=3\vec{a}-6\vec{b}-6\vec{a}+2\vec{b}=-3\vec{a}-4\vec{b}$
$=-3(3,0,-2)-4(1,-3,4)$
$=\left(-3\cdot 3,-3\cdot 0,-3\cdot(-2)\right)-(4\cdot 1,4\cdot(-3),4\cdot 4)$
$=(-9,0,6)-\ (4,-12,16)$
$=(-9-4,0-(-12),6-16)$
$=(-13,12,-10)$

問 9–6

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,1)-(2,-3)$
$=\left(-1-2,1-(-3)\right)=(-3,4)$
$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$
(2) $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(-1,\ 2)-(-1,1)$
$=(-1-(-1),2-1)=(0,1)$
$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\sqrt{0^2+1^2}=\sqrt{0+1}=1$
(3) $\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(2,-3)-(-1,\ 2)$
$=(2-(-1),-3-2)=(3,-5)$
$|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|=\sqrt{3^2+(-5)^2}=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$

問 9–7

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3\,,0,-2)-(-2,2,4)$
$=(3-(-2),0-2,-2-4)$
$=(5,-2,-6)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5^2 + (-2)^2 + (-6)^2}$

$= \sqrt{25 + 4 + 36} = \sqrt{65}$

(2) $\overrightarrow{BC} = (1, -1, -2) - (3, 0, -2)$

$= (1 - 3, -1 - 0, -2 - (-2))$

$= (-2, -1, 0)$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 0^2}$

$= \sqrt{4 + 1 + 0} = \sqrt{5}$

(3) $\overrightarrow{CA} = (-2, 2, 4) - (1, -1, -2)$

$= (-2 - 1, 2 - (-1), 4 - (-2))$

$= (-3, 3, 6)$

$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{9 + 9 + 36}$

$= \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$

問 9–8

$s\vec{a} + t\vec{b} = s(-3, -1) + t(2,3)$

$= (-3s, -s) + (2t, 3t)$

$= (-3s + 2t, -s + 3t)$

これは、$\vec{c} = (1, -9)$と等しいです。

したがって、x成分、y成分がそれぞれ等しいので、次の連立方程式が成り立ちます。

$$\begin{cases} -3s + 2t = 1 \\ -s + 3t = -9 \end{cases}$$

これを解いて、$s = -3$、$t = -4$

が得られます。

したがって、$\vec{c} = -3\vec{a} - 4\vec{b}$ となります。

問 9–9

$r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$

$= r(4, -3, 2) + s(1, 1, -2) + t(3, -1, -2)$

$= (4r, -3r, 2r) + (s, s, -2s) + (3t, -t, -2t)$

$= (4r + s + 3t, -3r + s - t, 2r - 2s - 2t)$

これは、$\vec{d} = (1, -4, 8)$ と等しいです。

したがって、x成分、y成分、z成分がそれぞれ等しいので、次のr、s、tについての 3 元連立方程式が成り立ちます。

$$\begin{cases} 4r + s + 3t = 1 & \cdots① \\ -3r + s - t = -4 & \cdots② \\ 2r - 2s - 2t = 8 & \cdots③ \end{cases}$$

③式の両辺を 2 で割ると、

$r - s - t = 4 \quad \cdots$ ④

を得ます。

①②④の式から、sを消去するのがやさしそうです。

①式＋④式から、$5r + 2t = 5 \ \cdots$ ⑤

②式＋④式から、$-2r - 2t = 0$

この式から、$r = -t$ を得ます。

これを⑤式に代入して、$5(-t) + 2t = 5$

したがって、$t = -\frac{5}{3}$ 、$r = \frac{5}{3}$ となります。

最後に、$t = -\frac{5}{3}$ 、$r = \frac{5}{3}$を④式に代入して、

$\frac{5}{3} - s - \left(-\frac{5}{3}\right) = 4$

したがって、$s = -\frac{2}{3}$

以上から、$\vec{d} = \frac{5}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{5}{3}\vec{c}$ となります。

問 9–10

(1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 6 \cdot 6\cos\frac{2}{3}\pi = 36 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -18$

(2) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BC} = 6 \cdot 6\cos\frac{1}{3}\pi = 36 \cdot \frac{1}{2} = 18$

($\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BC}$の始点をそろえます。)

(3) $\overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{AC}$ ですから、$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

となります。

問 9–11

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \cdot (-5) + 1 \cdot (-1) = -26$

$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{-26}{\sqrt{5^2+1^2}\sqrt{(-5)^2+(-1)^2}}$

$= \frac{-26}{\sqrt{26}\sqrt{26}} = -\frac{26}{26} = -1$

したがって、$\theta = \pi$

(2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot (\sqrt{3} - 1) + 1 \cdot (\sqrt{3} + 1) = 2\sqrt{3}$

$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

$= \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{1^2+1^2}\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}+1)^2}}$

$= \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sqrt{8}} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

したがって、$\theta = \frac{\pi}{6}$

(3) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-2) + 1 \cdot 1$

$= 0 + 2 + 1 = 3$

$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

$= \frac{3}{\sqrt{0^2+(-1)^2+1^2}\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+1^2}}$

$= \frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{9}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

したがって、$\theta = \frac{\pi}{4}$

(4) $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot 1+1\cdot 3+(-2)\cdot 2$

$=1+3-4=0$

したがって、$\theta=\frac{\pi}{2}$

問 9–12

(1) 行列Bは3行2列ですから、3×2行列です。

行列Cは2行2列ですから、2次正方行列です。

(2) 行列Aの$(2,2)$成分は2行目で2列目の成分ですから、0です。

行列Cの$(2,2)$成分は2行目で2列目の成分ですから、-2です。

(3) $(2,1)$成分から、$x=-2$　$(1,1)$成分から、$y=-1$

$(3,2)$成分から、$2z=-4$ となるので、$z=-2$

問 9-13

(1) $A+B=\begin{pmatrix}1&-3&0\\-2&5&2\\4&0&-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2&-7\\1&0&-3\\-2&4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0&-3+2&0-7\\-2+1&5+0&2-3\\4-2&0+4&-3+3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1&-1&-7\\-1&5&-1\\2&4&0\end{pmatrix}$

(2) $A-B=\begin{pmatrix}1&-3&0\\-2&5&2\\4&0&-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&2&-7\\1&0&-3\\-2&4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-0&-3-2&0-(-7)\\-2-1&5-0&2-(-3)\\4-(-2)&0-4&-3-3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1&-5&7\\-3&5&5\\6&-4&-6\end{pmatrix}$

(3) $2A=2\begin{pmatrix}1&-3&0\\-2&5&2\\4&0&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 1&2\cdot(-3)&2\cdot 0\\2\cdot(-2)&2\cdot 5&2\cdot 2\\2\cdot 4&2\cdot 0&2\cdot(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-6&0\\-4&10&4\\8&0&-6\end{pmatrix}$

(4) $-2A+3B=-2\begin{pmatrix}1&-3&0\\-2&5&2\\4&0&-3\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0&2&-7\\1&0&-3\\-2&4&3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-2\cdot 1&-2\cdot(-3)&-2\cdot 0\\-2\cdot(-2)&-2\cdot 5&-2\cdot 2\\-2\cdot 4&-2\cdot 0&-2\cdot(-3)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\cdot 0&3\cdot 2&3\cdot(-7)\\3\cdot 1&3\cdot 0&3\cdot(-3)\\3\cdot(-2)&3\cdot 4&3\cdot 3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-2&6&0\\4&-10&-4\\-8&0&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&6&-21\\3&0&-9\\-6&12&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+0&6+6&0-21\\4+3&-10+0&-4-9\\-8-6&0+12&6+9\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-2&12&-21\\7&-10&-13\\-14&12&15\end{pmatrix}$

(5) $(A+2B)+(3A-4B)=A+2B+3A-4B=4A-2B$

$=4\begin{pmatrix}1&-3&0\\-2&5&2\\4&0&-3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0&2&-7\\1&0&-3\\-2&4&3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}4\cdot 1&4\cdot(-3)&4\cdot 0\\4\cdot(-2)&4\cdot 5&4\cdot 2\\4\cdot 4&4\cdot 0&4\cdot(-3)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\cdot 0&2\cdot 2&2\cdot(-7)\\2\cdot 1&2\cdot 0&2\cdot(-3)\\2\cdot(-2)&2\cdot 4&2\cdot 3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}4&-12&0\\-8&20&8\\16&0&-12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&4&-14\\2&0&-6\\-4&8&6\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}4-0&-12-4&0+14\\-8-2&20-0&8+6\\16+4&0-8&-12-6\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}4&-16&14\\-10&20&14\\20&-8&-18\end{pmatrix}$$

(6) $-A+B-2(A-2B)=-A+B-2A+4B=-3A+5B$

$$=-3\begin{pmatrix}1&-3&0\\-2&5&2\\4&0&-3\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}0&2&-7\\1&0&-3\\-2&4&3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-3\cdot1&-3\cdot(-3)&-3\cdot0\\-3\cdot(-2)&-3\cdot5&-3\cdot2\\-3\cdot4&-3\cdot0&-3\cdot(-3)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5\cdot0&5\cdot2&5\cdot(-7)\\5\cdot1&5\cdot0&5\cdot(-3)\\5\cdot(-2)&5\cdot4&5\cdot3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-3&9&0\\6&-15&-6\\-12&0&9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&10&-35\\5&0&-15\\-10&20&15\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-3+0&9+10&0-35\\6+5&-15+0&-6-15\\-12-10&0+20&9+15\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-3&19&-35\\11&-15&-21\\-22&20&24\end{pmatrix}$$

問 9–14

(1) $\begin{pmatrix}3&-1\\-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot2+(-1)\cdot(-1)\\-2\cdot2+0\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-4\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix}2&-3\\3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-2\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot0-3\cdot(-1)&2\cdot(-2)-3\cdot1\\3\cdot0+5\cdot(-1)&3\cdot(-2)+5\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-7\\-5&-1\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot(-2)&3\cdot2\\1\cdot(-2)&1\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6&6\\-2&2\end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix}-2&1\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&4\\3&2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\cdot0+1\cdot3&-2\cdot(-1)+1\cdot2&-2\cdot4+1\cdot0\\2\cdot0+3\cdot3&2\cdot(-1)+3\cdot2&2\cdot4+3\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&4&-8\\9&4&8\end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix}1&0&3\\-2&3&-1\\3&-2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3&2\\0&1&-1\\-3&-2&0\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot2+0\cdot0+3\cdot(-3)&1\cdot3+0\cdot1+3\cdot(-2)&1\cdot2+0\cdot(-1)+3\cdot0\\-2\cdot2+3\cdot0-1\cdot(-3)&-2\cdot3+3\cdot1-1\cdot(-2)&-2\cdot2+3\cdot(-1)-1\cdot0\\3\cdot2-2\cdot0+4\cdot(-3)&3\cdot3-2\cdot1+4\cdot(-2)&3\cdot2-2\cdot(-1)+4\cdot0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-7&-3&2\\-1&-1&-7\\-6&-1&8\end{pmatrix}$$

問 9-15

(1) $AB=\begin{pmatrix}2&0\\3&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&3\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot4+0\cdot(-2)&2\cdot3+0\cdot1\\3\cdot4-3\cdot(-2)&3\cdot3-3\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&6\\18&6\end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix}4&3\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\3&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\cdot2+3\cdot3&4\cdot0+3\cdot(-3)\\-2\cdot2+1\cdot3&-2\cdot0+1\cdot(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17&-9\\-1&-3\end{pmatrix}$

したがって、$AB\neq BA$

(2) (1)の計算から、$AB=\begin{pmatrix}8&6\\18&6\end{pmatrix}$ですから、

$(AB)C=\begin{pmatrix}8&6\\18&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2\\-4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\cdot3+6\cdot(-4)&8\cdot2+6\cdot2\\18\cdot3+6\cdot(-4)&18\cdot2+6\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&28\\30&48\end{pmatrix}$

$BC=\begin{pmatrix}4&3\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2\\-4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\cdot3+3\cdot(-4)&4\cdot2+3\cdot2\\-2\cdot3+1\cdot(-4)&-2\cdot2+1\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&14\\-10&-2\end{pmatrix}$

ですから、

$$A(BC)=\begin{pmatrix}2&0\\3&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&14\\-10&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 0+0\cdot(-10)&2\cdot 14+0\cdot(-2)\\3\cdot 0-3\cdot(-10)&3\cdot 14-3\cdot(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&28\\30&48\end{pmatrix}$$

したがって、$(AB)C=A(BC)$となります。

⑶ $B+C=\begin{pmatrix}4&3\\-2&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&2\\-4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+3&3+2\\-2-4&1+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&5\\-6&3\end{pmatrix}$

ですから、

$$A(B+C)=\begin{pmatrix}2&0\\3&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7&5\\-6&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 7+0\cdot(-6)&2\cdot 5+0\cdot 3\\3\cdot 7-3\cdot(-6)&3\cdot 5-3\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14&10\\39&6\end{pmatrix}$$

⑴ から、$AB=\begin{pmatrix}8&6\\18&6\end{pmatrix}$

また、$AC=\begin{pmatrix}2&0\\3&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2\\-4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 3+0\cdot(-4)&2\cdot 2+0\cdot 2\\3\cdot 3-3\cdot(-4)&3\cdot 2-3\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&4\\21&0\end{pmatrix}$

ですから、

$$AB+AC=\begin{pmatrix}8&6\\18&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6&4\\21&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14&10\\39&6\end{pmatrix}$$

したがって、$A(B+C)=AB+AC$となります。

問 9–16

⑴ $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$において、$ad-bc=0\cdot 0-1\cdot 1=-1\neq 0$

したがって、逆行列は存在します。

逆行列は、$A^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

⑵ $B=\begin{pmatrix}3&2\\-7&-4\end{pmatrix}$において、$ad-bc=3\cdot(-4)-2\cdot(-7)=2\neq 0$

したがって、逆行列は存在します。

逆行列は、$B^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-4&-2\\7&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-1\\\frac{7}{2}&\frac{3}{2}\end{pmatrix}$

⑶ $C=\begin{pmatrix}4&-8\\-3&6\end{pmatrix}$において、$ad-bc=4\cdot 6-(-8)\cdot(-3)=0$

したがって、逆行列は存在しません。

⑷ $D=\begin{pmatrix}k&-1\\1&k\end{pmatrix}$において、$ad-bc=k\cdot k-(-1)\cdot 1=k^2+1\neq 0$

したがって、逆行列は存在します。

逆行列は、$D^{-1}=\frac{1}{k^2+1}\begin{pmatrix}k&1\\-1&k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{k}{k^2+1}&\frac{1}{k^2+1}\\-\frac{1}{k^2+1}&\frac{k}{k^2+1}\end{pmatrix}$

問 9–17

⑴ 連立方程式を行列の積で表すと、

$$\begin{pmatrix}3&-1\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$$

となります。

$ad-bc=3\cdot(-2)-(-1)\cdot 1=-5\neq 0$

したがって、逆行列が存在して、

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-1\\1&-2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}=\frac{1}{-5}\begin{pmatrix}-2&1\\-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}=\frac{1}{-5}\begin{pmatrix}-2\cdot 3+1\cdot(-4)\\-1\cdot 3+3\cdot(-4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

したがって、$x=2$、$y=3$

⑵ 連立方程式を行列の積で表すと、

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

となります。

$ad - bc = 4 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) = 11 \neq 0$

したがって、逆行列が存在して、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + (-3) \cdot (-3) \\ 1 \cdot 1 + 4 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

したがって、$x = 1$、$y = -1$

問 9–18

(1) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = -1 \cdot 5 - 3 \cdot (-4) = 7$

(2) $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -8 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 - (-1) \cdot (-8) = 0$

(3) $\begin{vmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 6 & -3 & -1 \\ -4 & 5 & 2 \end{vmatrix}$

$= 5 \cdot (-3) \cdot 2 + (-3) \cdot (-1) \cdot (-4) + (-2) \cdot 5 \cdot 6 - (-2) \cdot (-3) \cdot (-4) - (-1) \cdot 5 \cdot 5 - 2 \cdot 6 \cdot (-3)$

$= -30 - 12 - 60 + 24 + 25 + 36 = -17$

(4) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & -3 & 3 \end{vmatrix}$

$= 1 \cdot 5 \cdot 3 + (-2) \cdot (-4) \cdot 0 + 5 \cdot (-3) \cdot 0 - 5 \cdot 5 \cdot 0 - (-4) \cdot (-3) \cdot 1 - 3 \cdot 0 \cdot (-2)$

$= 15 + 0 + 0 - 0 - 12 - 0 = 3$

問 9–19

(1) 係数行列$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$において、$\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 - (-5) \cdot (-4) = 1 \neq 0$

したがって、連立方程式の解は存在し、

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -6 & 7 \end{vmatrix}}{1} = 4 \cdot 7 - (-5) \cdot (-6) = 28 - 30 = -2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -4 & -6 \end{vmatrix}}{1} = 3 \cdot (-6) - 4 \cdot (-4) = -18 + 16 = -2$$

したがって、$x = -2$、$y = -2$

(2) 係数行列$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$において、

$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

$= 5 \cdot 1 \cdot 1 + (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) + 2 \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot (-3) - (-3) \cdot 2 \cdot 5 - 1 \cdot 2 \cdot (-3)$

$= 5 - 27 + 8 + 6 + 30 + 6 = 28 \neq 0$

したがって、連立方程式の解は存在し、

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -11 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{28}$$

$$= \frac{-11 \cdot 1 \cdot 1 + (-3) \cdot (-3) \cdot 7 + 2 \cdot 2 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \cdot 7 - (-3) \cdot 2 \cdot (-11) - 1 \cdot 0 \cdot (-3)}{28}$$

$$= \frac{-11 + 63 + 0 - 14 - 66 - 0}{28} = -1$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}5&-11&2\\2&0&-3\\-3&7&1\end{vmatrix}}{28}$$
$$=\frac{5\cdot0\cdot1+(-11)\cdot(-3)\cdot(-3)+2\cdot7\cdot2-2\cdot0\cdot(-3)-(-3)\cdot7\cdot5-1\cdot2\cdot(-11)}{28}$$
$$=\frac{0-99+28-0+105+22}{28}=2$$
$$z=\frac{\begin{vmatrix}5&-3&-11\\2&1&0\\-3&2&7\end{vmatrix}}{28}$$
$$=\frac{5\cdot1\cdot7+(-3)\cdot0\cdot(-3)+(-11)\cdot2\cdot2-(-11)\cdot1\cdot(-3)-0\cdot2\cdot5-7\cdot2\cdot(-3)}{28}$$
$$=\frac{35+0-44-33-0+42}{28}=0$$
したがって、$x=-1$、$y=2$、$z=0$

第 10 章　解答

問 10–1

(1) ${}_6P_3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

(2) ${}_{100}P_2 = 100 \cdot 99 = 9900$

(3) ${}_5C_2 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$

(4) ${}_{15}C_{13} = {}_{15}C_2 = \frac{15 \cdot 14}{2 \cdot 1} = 105$

問 10–2

(1) 全部で並び方は何通りになるか求めるには、5 人の順列を計算します。

${}_5P_5 = 5! = 120$ 通り

(2) 右端が C なので、右端は C で固定されます。

したがって、残り 4 人の順列を計算すればよいことなります。

${}_4P_4 = 4! = 24$ 通り

(3) A さんと B さんが隣どうしになる並び方は、A さんと B さんをまとめて 1 つの要素とみなして、4 人の順列を計算します。

しかし、4 人分の並び方それぞれに対し、A・B と B・A の 2 パターンの隣りあわせが考えられるので、

${}_4P_4 \times 2 = 4! \times 2 = 24 \times 2 = 48$ 通り

問 10–3

頭痛が認められる事象を A、倦怠感が認められる事象を B とします。

(1) 頭痛が認められる確率を求めます。

$$P(A) = \frac{\text{頭痛の人数}}{\text{全体の人数}} = \frac{23}{100} = 0.23$$

したがって、頭痛が認められる確率は 0.23 または 23 %です。

(2) これは事象 A と事象 B の和事象となります。

和事象の確率は、

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ で求めます。

ここで、$A \cap B$は頭痛と倦怠感が認められる事象ですから、

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{23}{100} + \frac{12}{100} - \frac{5}{100} = \frac{30}{100} = 0.30 \end{aligned}$$

したがって、頭痛または倦怠感を認める確率は 0.30 または 30 %です。

(3) 副作用を認めない事象は、和事象$A \cup B$の余事象になります。

余事象の確率は、$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$ で求めます。

したがって、

$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.30 = 0.70$

副作用を認めない確率は 0.70 または 70 %です。

問 10–4

A さんが当たりを引く事象を E、B さんが当たりを引く事象を F とします。

(1) A さんが当たりを引く確率は、$P(E) = \frac{4}{10}$です。

B さんが当たる確率は、A さんがくじを引いた後、くじを戻しているので、$P(F) = \frac{4}{10}$です。

A さんと B さんの両方が当たりを引く事象は積事象$E \cap F$で、E と F は独立な事象なので、

$$\begin{aligned} P(E \cap F) &= P(E) \times P(F) \\ &= \frac{4}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{16}{100} = 0.16 \end{aligned}$$

したがって、A さんと B さんの両方が当たりを引く確率は、0.16 または 16 %です。

(2) A さんがくじを引いた後、元に戻さないので、事象 E、F は独立ではありません。

したがって、

A さんと B さんがともに当たりくじを引く積事象$E \cap F$の確率は、

$P(E \cap F) = P(E) \times P_E(F)$で求めます。

条件付確率$P_E(F)$は、A さんが当たりくじを引いたとき、B さんが当たりくじを引く確率です。

当たりくじを引いた A さんはくじを戻さないので、残りのくじは 9 本(当たり 3 本を含む)。

したがって、B さんが当たりを引く確率は、$P_E(F) = \frac{3}{9}$ですから、

$$\begin{aligned} P(E \cap F) &= P(E) \times P_E(F) \\ &= \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{2}{15} = 0.13 \end{aligned}$$

したがって、A さんと B さんの両方が当たりを引く確率は、0.13 または 13 %です。

問 10–5

疾患 X に罹患している事象を X、検査で陽性となった事象を Y とします。
求めたい事象の確率は、陽性であったときに罹患している事象の確率ですから、
$P_Y(X) = \frac{P(Y \cap X)}{P(Y)}$となります。
まず、$P(Y)$を求めます。
事象 Y は、疾患に罹患して検査が陽性となる事象$(X \cap Y)$と、罹患していないで検査が陽性になる事象$(\bar{X} \cap Y)$の和事象となります。
つまり、$Y = (X \cap Y) \cup (\bar{X} \cap Y)$ となります（$\bar{X}$ は X の余事象で、疾患 X に罹患していない事象です）。
ここで、$X \cap Y$と$\bar{X} \cap Y$は排反ですから、
$P(Y) = P(X \cap Y) + P(\bar{X} \cap Y)$となります。
また、$P(X \cap Y) = P(X) \times P_X(Y)$、
$P(\bar{X} \cap Y) = P(\bar{X}) \times P_{\bar{X}}(Y)$ となりますが、
疾患に罹患している確率
$P(X) = \frac{1}{100000} = 0.00001$
疾患に罹患していない確率
$P(\bar{X}) = 1 - 0.00001 \fallingdotseq 1$
疾患に罹患していて検査が陽性となる確率
$P_X(Y) = 0.99$
疾患に罹患していないで検査が陽性となる確率$P_{\bar{X}}(Y) = 0.01$
したがって、

$$
\begin{aligned}
P(Y) &= P(X \cap Y) + P(\bar{X} \cap Y) \\
&= P(X) \times P_X(Y) + P(\bar{X}) \times P_{\bar{X}}(Y) \\
&= 0.00001 \times 0.99 + 1 \times 0.01 \\
&= 0.0000099 + 0.01 \\
&= 0.0100099
\end{aligned}
$$

途中式で、$P(X \cap Y) = 0.0000099$も求まりました。
したがって、求めたい確率は$P_Y(X)$は、

$$
P_Y(X) = \frac{P(Y \cap X)}{P(Y)} = \frac{0.0000099}{0.0100099} = 0.00098902 \fallingdotseq 0.1\ \%
$$

となります。

問 10–6

不良品の確率を$p = 0.04$、
良品の確率を$q = 1 - p = 0.96$とします。
また、試行回数を$n = 5$とします。
ここで、不良品の個数を X と置くと、

$P(X \leqq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$
反復試行の定理から、

$$
\begin{aligned}
P(X = 0) &= {}_nC_r p^r (1 - p)^{n-r} \\
&= {}_5C_0 \cdot 0.04^0 \cdot (1 - 0.04)^5 \\
&= 1 \cdot 1 \cdot 0.96^5 \\
&= 0.8153726976 \fallingdotseq 0.81537 \\
P(X = 1) &= {}_5C_1 \cdot 0.04^1 \cdot (1 - 0.04)^4 \\
&= 5 \cdot 0.04 \cdot 0.96^4 \\
&= 5 \cdot 0.04 \cdot 0.84934656 \\
&= 0.169869312 \fallingdotseq 0.16987 \\
P(X = 2) &= {}_5C_2 \cdot 0.04^2 \cdot (1 - 0.04)^3 \\
&= 10 \cdot 0.0016 \cdot 0.96^3 \\
&= 10 \cdot 0.0016 \cdot 0.884736 \\
&= 0.014155776 \fallingdotseq 0.01416
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(X \leqq 2) &= 0.81537 + 0.16987 + 0.01416 \\
&= 0.9994 = 99.94\%
\end{aligned}
$$

問 10–7

袋からカードを引く場合、確率変数 X の可能な値と確率は次のようになります

$$
\begin{aligned}
P(X = 1) &= \frac{1}{1+2+3+4+10} = \frac{1}{20} \\
P(X = 2) &= \frac{2}{1+2+3+4+10} = \frac{2}{20} \\
P(X = 3) &= \frac{3}{1+2+3+4+10} = \frac{3}{20} \\
P(X = 4) &= \frac{4}{1+2+3+4+10} = \frac{4}{20} \\
P(X = 5) &= \frac{10}{1+2+3+4+10} = \frac{10}{20}
\end{aligned}
$$

X の確率分布表は下表のようになります。

X	1	2	3	4	5	計
P	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{10}{20}$	1

したがって、期待値は X がとる値とその確率をかけ、その和を求めて、

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{20} + 2 \cdot \frac{2}{20} + 3 \cdot \frac{3}{20} + 4 \cdot \frac{4}{20} + 5 \cdot \frac{10}{20}$$
$$= \frac{1+4+9+16+50}{20} = \frac{80}{20} = 4$$

問 10–8

まず、当たりくじを引く組み合わせとその確率を求めます。

5 本のくじの中から 2 本を引くので、引き方は全部で ${}_5C_2 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$ 通りです。

その内、当たりくじが 0 本となる引き方は、3 本の外れくじから 2 本を引くので、${}_3C_2 = 3$通り。

したがって、

当たりくじ 0 本：$P(X=0) = \frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} = \frac{3}{10}$

当たりくじが 1 本となるのは、当たりくじ 2 本から 1 本、外れくじ 3 本から 1 本を引くので、

${}_2C_1 \times {}_3C_1 = 2 \times 3 = 6$通りです。

したがって、

当たりくじ 1 本の確率は、

$P(X=1) = \frac{{}_2C_1 \times {}_3C_1}{{}_5C_2} = \frac{2 \cdot 3}{10} = \frac{6}{10}$ です。

当たりくじ 2 本となるのは、当たりくじ 2 本から 2 本を引くので、${}_2C_2 = 1$通り。

したがって、当たりくじ 2 本の確率は、

$P(X=2) = \frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} = \frac{1}{10}$ です。

当たりくじの本数を X と置くと、確率変数 X の確率分布表は下表になります。

X	0	1	2	計
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

したがって、期待値は、

$$E(X) = 0 \cdot \left(\frac{3}{10}\right) + 1 \cdot \left(\frac{6}{10}\right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)$$
$$= \frac{0+6+2}{10} = \frac{8}{10} = 0.8$$

したがって、期待値 $E(X) = 0.8$

問 10–9

二項分布$B(n,p)$における期待値（平均値）は、

$\mu = np$で表されます。

ここで、n は試行回数、p は成功する確率です。

また、標準偏差は、

$\sigma = \sqrt{np(1-p)}$で表されます。

これらの式を利用して期待値と標準偏差を求めます。

(1) 二項分布$B\left(400, \frac{1}{4}\right)$ から、

$$\mu = np = 400 \times \frac{1}{4} = 100$$
$$\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{400 \times \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)}$$
$$= \sqrt{100 \times \frac{3}{4}} = \sqrt{75} \fallingdotseq 8.7$$

(2) $B\left(450, \frac{1}{3}\right)$から、

$$\mu = np = 450 \times \frac{1}{3} = 150$$
$$\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{450 \times \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)}$$
$$= \sqrt{150 \times \frac{2}{3}} = \sqrt{100} = 10$$

問 10–10

1 個のさいころを投げて、2 以下の目が出る確率は、

$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$となります。

4 回投げるとき、各回の試行は独立ですから、確率変数 X は二項分布$B\left(4, \frac{1}{3}\right)$に従います。

2 以下の目が 0 回出る確率

$$P(X=0) = {}_4C_0 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$$

2 以下の目が 1 回出る確率

$$P(X=1) = {}_4C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{32}{81}$$

2 以下の目が 2 回出る確率

$$P(X=2) = {}_4C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{24}{81}$$

2 以下の目が 3 回出る確率

$$P(X=3) = {}_4C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^1 = 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{8}{81}$$

2 以下の目が 4 回出る確率

$$P(X=4) = {}_4C_4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$$

したがって、確率変数 X の確率分布表は、下表になります。

X	0	1	2	3	4	計
$P(X)$	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$	1

問 10–11

⑴ $P(0 \leqq Z \leqq 1.96) = P(1.96) = 0.475$

⑵ $P(0 \leqq Z \leqq 1.64) = P(1.64) = 0.4495$

⑶ $P(2.5 \leqq Z \leqq 3.0) = P(3.0) - P(2.5)$

$= 0.49865 - 0.49379$

$= 0.00486$

問 10–12

⑴ 標準化して、Z に関する式に変形します。

$P(25 \leqq X \leqq 34) = P\left(\frac{25-25}{9} \leqq Z \leqq \frac{34-25}{9}\right)$

$= P(0 \leqq Z \leqq 1) = P(1)$

標準正規分布表から、

$P(1) = 0.34134$

⑵ 標準化して、Z に関する式に変形します。

$P(X \geqq 32.2) = P\left(z \geqq \frac{32.2-25}{9}\right)$

$= P(z \geqq 0.8) = 0.5 - P(0.8)$

標準正規分布表から、

$0.5 - P(0.8) = 0.5 - 0.28814 = 0.21186$

⑶ 標準化して、Z に関する式に変形します。

$P(29.5 \leqq X \leqq 30.4)$

$= P\left(\frac{29.5-25}{9} \leqq Z \leqq \frac{30.4-25}{9}\right)$

$= P(0.5 \leqq Z \leqq 0.6)$

標準正規分布表から、

$P(0.6) - P(0.5) = 0.22575 - 0.19146$

$= 0.03429$

問 10–13

正規分布 $N(104, 22^2)$において、糖尿病の基準となる血糖値を超える確率は、$P(126 \leqq X)$となります。

標準化して、Z に関する式に変形します。

$Z = \frac{X-104}{22}$

$P(126 \leqq X) = P\left(\frac{126-104}{22} \leqq Z\right)$

$= P\left(\frac{22}{22} \leqq Z\right) = P(1 \leqq Z)$

$= P(0 \leqq Z) - P(0 \leqq Z \leqq 1)$

$= 0.5 - P(1) = 0.5 - 0.34134$

$= 0.15866 \fallingdotseq 0.159$、または 15.9 %

別解

糖尿病の基準となる 126 mg/dL は、平均値から 1 σ の臨界値です。

0 から 1 σ の範囲に入る割合は、0.341 です。

したがって、この臨界値の外側にいる人の割合が求める割合です。

$P(126 \leqq X) = 0.5 - 0.341$

$= 0.159$、または 15.9 %

問 10–14

⑴ 正規分布 $N(122.6, 31.7^2)$において、血清 LDL コレステロール値が 140 mg/dL 超える確率は、$P(140 \leqq X)$となります。

標準化して、Z に関する式に変形します。

$Z = \frac{X - 122.6}{31.7}$

$P(140 \leqq X) = P\left(\frac{140-122.6}{31.7} \leqq Z\right)$

$= P\left(\frac{17.4}{31.7} \leqq Z\right) = P(0.55 \leqq Z)$

$= 0.5 - P(0.55) = 0.5 - 0.20884$

$= 0.29116 \fallingdotseq 0.291$、または 29.1 %

⑵ 境界域高 LDL コレステロール血症の基準値となる 120〜139 mg/dL の範囲に含まれる人の割合は、標準化して、Z に関する式に変形します。$Z = \frac{X-122.6}{31.7}$

$P(120 \leqq X \leqq 139)$

$= P\left(\frac{120 - 122.6}{31.7} \leqq Z \leqq \frac{139 - 122.6}{31.7}\right)$

$= P\left(\frac{-2.6}{31.7} \leqq Z \leqq \frac{16.4}{31.7}\right)$

$\fallingdotseq P(-0.082 \leqq Z \leqq 0.517)$

$= p(0.08) + P(0.52) = 0.03188 + 0.19847$

$= 0.23035 \fallingdotseq 0.230$、または 23.0 %

問 10–15

⑴ 両側 5 %点は、1.96σですから、

臨界値$= 1.96 \cdot 8.5 = 16.66$です。

したがって、5 %点は、

$53.4 - 16.66 = 36.74$ kg

$53.4 + 16.66 = 70.06$ kg

(2) 正規分布 $N(53.4, 8.5^2)$において、体重が 70 kg を超える日本人男性の確率は、標準化して、Z に関する式に変形します。$Z = \frac{X-53.4}{8.5}$

$$
\begin{aligned}
P(70 \leqq X) &= P\left(\frac{70-53.4}{8.5} \leqq Z\right) \\
&= P\left(\frac{16.6}{8.5} \leqq Z\right) = P(1.95 \leqq Z) \\
&= P(0 \leqq Z) - P(0 \leqq Z \leqq 1.95) \\
&= 0.5 - P(1.95) = 0.5 - 0.47441 \\
&= 0.02559 \fallingdotseq 0.026
\end{aligned}
$$

したがって、

70 kg を超える日本人男性の人数は、

$134 \times 0.026 = 3.484 \fallingdotseq$ 3人となります。

国試問題にチャレンジ

問 10–1

陽性予測値は、ある検査が陽性であった場合、その患者が実際に疾患をもっている確率を示す指標です。

陽性予測値

$= \frac{\text{疾患に罹患している検査陽性者数(真の陽性者数)}}{\text{検査陽性者数(真の陽性者数+偽の陽性者数)}} \times 100$

で表すことができます。

日本人の患者を計 10 万人として考え、問題文から、表にまとめます。

		疾患 X 罹患している	疾患 X 罹患していない	計
疾患マーカー	陽性	198	1996	2194
疾患マーカー	陰性	2	97804	97806
計		200	99800	100000

陽性予測値

$= \frac{\text{疾患マーカーM 陽性な疾患 X 罹患者数}}{\text{疾患マーカーM 陽性者}} \times 100$

$= \frac{198}{2194} \times 100 \fallingdotseq 9.0$ %

第 11 章　解答

問 11–1

(1) 答え：順序尺度

マラソン大会の順位は、ランナー間の順位を表すため、大小関係のみをもちます。1位より2位の方が速いことは分かりますが、順位間の差を定量的に測ることはできません。たとえば、1位と2位の差と、3位と4位の差は、必ずしも同じとは限りません。したがって、マラソン大会の順位は、順位間の差が定量的に定まらないため、順序尺度となります。

(2) 答え：比尺度

商品の価格は、0円という絶対的な原点があり、金額の大小に加えて、価格の比較や計算が有効です。たとえば、100円の商品と200円の商品を比較したり、2つの商品の価格を合計したりすることができます。さらに、価格の差が等間隔である場合もあります。たえば、100円、200円、300円と価格が上がっていく場合、価格差は常に100円です。ただし、必ずしも価格差が等間隔であるとは限りません。いずれにしても、商品の価格は、0円という原点があり、価格の比較や計算が有効であるため、比尺度となります。

(3) 答え：名義尺度

都道府県は、地理的なエリアを示すカテゴリであり、順序や大小がありません。たとえば、「東京都」と「大阪府」を比較しても、どちらが優れているとかいうことはできません。各都道府県は、互いに排他的であり、重複することはありません。

したがって、都道府県は、名義尺度となります。

(4) 答え：間隔尺度

テストの点数は、大小とともに点数の間隔が意味をもちます。たとえば、90点と80点では、90点の方がよい成績であることがわかかりま

す。また、90点と80点の差は、80点と70点の差と同じであることもわかかります。ただし、テストの点数はゼロ点が任意であり、絶対的なゼロ点が存在しません。たとえば、英語のテストでは0点が最低点である一方、数学のテストでは0点が合格点であることもあります。しかし、テストの点数は、大小とともに点数の間隔が意味をもつため、間隔尺度とみなされます。

(5) 答え：間隔尺度

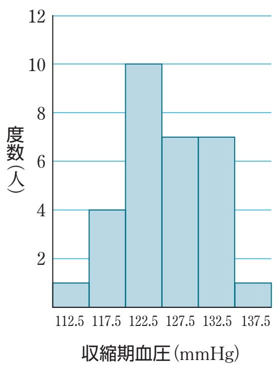
摂氏温度は、摂氏0度が絶対的なゼロではなく、摂氏温度スケールのゼロは任意です。しかし、摂氏温度では温度の間隔が等しいため、間隔尺度とみなされます。たとえば、摂氏20度と摂氏30度の差は、摂氏10度と摂氏20度の差と同じです。ただし、摂氏温度は絶対的な温度を表すものではありません。したがって、摂氏温度は間隔尺度となります。

問 11–2

度数分布表

階級 (mmHg) 以上　未満	階級値 (mmHg)	度数（人）
110～115	112.5	1
115～120	117.5	4
120～125	122.5	10
125～130	127.5	7
130～135	132.5	7
135～140	137.5	1

ヒストグラム



問 11–3

$$平均値 = \frac{120+130+125+\cdots+128+130+132}{10}$$

$$= \frac{1280}{10} = 128\ \ \mathrm{mmHg}$$

低い順に並べると、

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
118	120	122	125	128	130	130	132	135	140

となり、中央値は、5 番目の値と 6 番目の値の平均値になります。

したがって、

$$中央値 = \frac{128+130}{2} = \frac{258}{2} = 129\ \ \mathrm{mmHg}$$

問 11–4

$$平均値 = \frac{180+200+190+\cdots+215}{10}$$

$$= \frac{4033}{20} = 201.65 \fallingdotseq 201.7\ \ \mathrm{mg/dL}$$

低い順に並べると、

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
180	185	190	190	190	195	195	198	200	200	200

12	13	14	15	16	17	18	19	20
205	205	205	210	210	215	215	220	225

となり、中央値は、10 番目の値と 11 番目の値の平均値になります。

$$したがって、中央値 = \frac{200+200}{2} = 200\ \ \mathrm{mg/dL}$$

問 11–5

$$平均値 = \frac{150+160+140+170+\cdots+180+145+175+160}{10}$$

$$= \frac{1600}{10} = 160\ \ \mathrm{mg/dL}$$

$$標準偏差 = \sqrt{\frac{(150-160)^2+(160-160)^2+\cdots+(160-160)^2}{10-1}}$$

$$= \sqrt{\frac{(-10)^2+0+(-20)^2+\cdots+0}{9}} = \sqrt{\frac{1500}{9}}$$

$$\fallingdotseq \sqrt{166.67} \fallingdotseq 12.9\ \mathrm{mg/dL}$$

$$標準誤差 = \frac{12.9}{\sqrt{10}} \fallingdotseq \frac{12.9}{3.1623} \fallingdotseq 4.1\ \mathrm{mg/dL}$$

問 11–6

$$平均値 = \frac{120+110+130+115+\cdots+140+105+125+130}{10}$$

$$= \frac{1235}{10} = 123.5\ \ \mathrm{mg/mL}$$

$$標準偏差 = \sqrt{\frac{(120-123.5)^2+(110-123.5)^2+\cdots+(130-123.5)^2}{10-1}}$$

$$= \sqrt{\frac{(-3.5)^2+(-13.5)^2+6.5^2+\cdots+6.5^2}{9}}$$

$$= \sqrt{\frac{1102.5}{9}} = \sqrt{122.5} = 11.06797$$

$≒$ 11.1 mg/dL

標準誤差 $= \frac{11.1}{\sqrt{10}} ≒ \frac{11.1}{3.1623} ≒$ 3.5 mg/dL

問 11–7

低い順に並べると、

62, 65, 68, 69, 70, 72, 73, 78, 80, 81, 83, 85, 87, 89, 92

となります。

範囲 = 最大値 − 最小値

= 92 − 62 = 30 mL/min/1.73 m²

次に、データを下位半分と上位半分に分け、それぞれの中央値を求めます。

下半分：62, 65, 68, 69, 70, 72, 73

下半分の中央値は、69 ですので、

第一四分位数 Q1 = 69 mL/min/1.73 m² です。

第二四分位数 Q は中央値ですから、

Q2 = 78 mL/min/1.73 m² です。

上半分：80, 81, 83, 85, 87, 89, 92

上半分の中央値は、85 ですので、

Q3 = 85 mL/min/1.73 m² です。

問 11–8

$\mathrm{Q1} = 69\ \mathrm{mL/min/1.73\ m^2}$、

$\mathrm{Q2} = 78\ \mathrm{mL/min/1.73\ m^2}$、

$\mathrm{Q3} = 85\ \mathrm{mL/min/1.73\ m^2}$です。

また、最大値は 92 $\mathrm{mL/min/1.73\ m^2}$、

最小値は 62 $\mathrm{mL/min/1.73\ m^2}$です。

四分位範囲IQR $= 85 - 69$

$= 16\ \mathrm{mL/min/1.73\ m^2}$

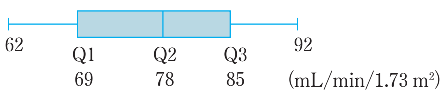
下限値$= \mathrm{Q1} - 1.5\mathrm{IQR} = 69 - 1.5 \cdot 16$

$= 45 < 62$

上限値$= \mathrm{Q3} + 1.5\mathrm{IQR} = 85 + 1.5 \cdot 16$

$= 109 > 92$

したがって、外れ値はありません。



問 11–9

変数 x の平均値$\bar{x} = \frac{24.5+21.7+23.9+\cdots+29.1}{10}$

$= \frac{240}{10} = 24.0$

変数 x の分散

$$S_x{}^2 = \frac{(24.5-24.0)^2+(21.7-24.0)^2+\cdots+(29.1-24.0)^2}{10}$$

$$= \frac{0.5^2+(-2.3)^2+(-0.1)^2+\cdots+5.1^2}{10}$$

$$= \frac{0.25+5.29+0.01+\cdots+26.01}{10} = \frac{96}{10} = 9.6$$

変数 y の平均値$\bar{y} = \frac{0.67+0.59+0.81+\cdots+1.01}{10}$

$= \frac{7.47}{10} = 0.747$

変数 y の分散

$$S_y{}^2 = \frac{(0.67-0.747)^2+(0.59-0.747)^2+\cdots+(1.01-0.747)^2}{10}$$

$$= \frac{(-0.077)^2+(-0.157)^2+0.063^2+\cdots+0.263^2}{10}$$

$$= \frac{0.005929+0.024649+0.003969+\cdots+0.069169}{10}$$

$$= \frac{0.29261}{10} = 0.029261$$

共分散

$$S_{xy} = \frac{0.5\cdot(-0.077)+(-2.3)(-0.157)+\cdots+5.1\cdot 0.263}{10}$$

$$= \frac{-0.0385+0.3611+(-0.0063)+\cdots+1.3413}{10}$$

$$= \frac{4.99}{10} = 0.499$$

相関係数$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_x{}^2 S_y{}^2}} = \frac{0.499}{\sqrt{9.6\cdot 0.029261}} = \frac{0.499}{\sqrt{0.2809056}}$

$≒ \frac{0.499}{0.5300} ≒ 0.94$

問 11–10

変数 x の平均値$\bar{x} = \frac{26.1+21.3+24.9+\cdots+30.5}{10} =$

$\frac{255.1}{10} = 25.51$

変数 x の分散

$$S_x{}^2 = \frac{(26.1-25.51)^2+(21.3-25.51)^2+\cdots+(30.5-25.51)^2}{10}$$

$$= \frac{0.59^2+(-4.21)^2+(-0.61)^2+\cdots+4.99^2}{10}$$

$$= \frac{0.3481+17.7241+0.3721+\cdots+2.9001}{10}$$

$$= \frac{109.949}{10} = 10.9949$$

変数 y の平均値$\bar{y} = \frac{7.2+8.9+7.8+\cdots+6.3}{10}$

$= \frac{75}{10} = 7.5$

変数 y の分散

$$S_y{}^2 = \frac{(7.2-7.5)^2+(8.9-7.5)^2+(7.8-7.5)^2+\cdots+(6.3-7.5)^2}{10}$$

$$= \frac{(-0.3)^2+1.4^2+0.3^2+\cdots+(-1.2)^2}{10}$$

$$= \frac{0.09+1.96+0.09+\cdots+1.44}{10} = \frac{6.8}{10} = 0.68$$

共分散

$$S_{xy} = \frac{0.59\cdot(-0.3)+(-4.21)\cdot 1.4+\cdots+4.99\cdot(-1.2)}{10}$$

$= \frac{-0.177+(-5.894)+(-0.183)+\cdots+(-5.988)}{10}$

$= \frac{-26.71}{10} = -2.671$

相関係数$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_x{}^2 S_y{}^2}} = \frac{-2.671}{\sqrt{10.9949 \cdot 0.68}} = \frac{-2.671}{\sqrt{7.476532}}$

$\fallingdotseq \frac{-2.671}{2.734} \fallingdotseq -0.98$

問 11–11

傾き$a = \frac{S_{xy}}{S_x{}^2}$から、$a = \frac{0.499}{9.6} \fallingdotseq 0.0520$

切片$b = \bar{y} - a\bar{x}$から、

$b = 0.747 - \frac{0.499}{9.6} \cdot 24 = 0.747 - 1.24750$

$= -0.5005$

したがって、

求める回帰直線式は、$y = 0.0520x - 0.5005$

問 11–12

傾き$a = \frac{S_{xy}}{S_x{}^2}$から、$a = \frac{-2.671}{10.9949} \fallingdotseq -0.243$

切片$b = \bar{y} - a\bar{x}$から、

$b = 7.5 - \left(-\frac{2.671}{10.9949}\right) \cdot 25.51 = 7.5 + 6.197165$

$= 13.697165 \fallingdotseq 13.7$

したがって、

求める回帰直線式は、$y = -0.243x + 13.7$

問 11–13

例題 11–7 から、BMI の平均値と標準偏差は、

平均値$\bar{x} = 25.96 \fallingdotseq 26.0$ kg/m²

標準偏差$S = \sqrt{\frac{S_x{}^2}{9}} = \sqrt{\frac{167.844}{9}} = 4.3$ kg/m²

となります。

自由度$\nu = n - 1 = 10 - 1 = 9$

t 分布表から、$t_9(0.025) = 2.262$です。

したがって、

BMI の信頼区間 $= \bar{x} \pm t_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$

$= 26.0 \pm 2.262\left(\frac{4.3}{\sqrt{10}}\right) = 26.0 \pm 2.262 \cdot \frac{4.3}{3.1623}$

$= 26.0 \pm 3.1$ kg/m²

または、95 %CI [22.9, 29.1] (kg/m²)

例題 11–7 から、HbA1c の平均値と標準偏差は、

平均値$\bar{x} = 5.8$ %

標準偏差$S = \sqrt{\frac{S_x{}^2}{9}} = \sqrt{\frac{2.54}{9}} \fallingdotseq 0.53$ %

となります。

自由度$\nu = n - 1 = 10 - 1 = 9$

t 分布表から、$t_9(0.025) = 2.262$です。

したがって、

HbA1c の信頼区間 $= 5.8 \pm 2.262\left(\frac{0.53}{\sqrt{10}}\right)$

$= 5.8 \pm 2.262 \cdot \frac{0.53}{3.1623} = 5.8 \pm 0.4$ %

または、95 %CI [5.4 %, 6.2 %]

問 11–14

まず、平均値$\bar{x}$を求めます。

$\bar{x} = \frac{52+71+63+94+\cdots+83}{20} = \frac{1544}{20} = 77.2$ IU/L

次に、標準誤差 S を求めます。

$S = \sqrt{\frac{(52-77.2)^2+(71-77.2)^2+(63-77.2)^2+\cdots+(83-77.2)^2}{20-1}}$

$= \sqrt{\frac{(-25.2)^2+(-6.2)^2+(-14.2)^2+\cdots+5.8^2}{19}}$

$= \sqrt{\frac{635.04+38.44+201.64+\cdots+33.64}{19}}$

$= \sqrt{\frac{5409.2}{19}} \fallingdotseq 16.873$ IU/L

自由度$\nu = n - 1 = 20 - 1 = 19$

t 分布表から、$t_{19}(0.025) = 2.093$です。

したがって、

γ-GTP の信頼区間 $= 77.2 \pm 2.093\left(\frac{16.873}{\sqrt{20}}\right)$

$= 77.2 \pm 2.093 \cdot \frac{16.873}{4.4721}$

$= 77.2 \pm 7.9$ IU/L

または、95 %CI [69.3, 85.1] (IU/L)

問 11–15

まず、標本比率$\hat{p}$（発熱の改善効果が確認された患者の割合）を計算します。

$\hat{p} = \frac{\text{発熱の改善効果が確認された患者数}}{\text{標本全体の患者数}}$

$= \frac{37}{40} = 0.925$

次に、Zを 99 %信頼区間におけるZ値に設定します。99 %信頼区間の場合、Z値は 2.58 です。

信頼区間 $= \hat{p} \pm z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

99 %CI $= 0.925 \pm 2.58\sqrt{\frac{0.925(1-0.925)}{40}}$

$$= 0.925 \pm 2.58\sqrt{\frac{0.925 \cdot 0.075}{40}}$$

$$= 0.925 \pm 2.58\sqrt{0.001734375}$$

$$\fallingdotseq 0.925 \pm 2.58 \cdot 0.0416458$$

$$\fallingdotseq 0.925 \pm 0.107$$

%で表せば、92.5 ± 10.7 %

あるいは、99 %CI [0.818, 1.032]

%で表せば、99 %CI [81.8 %, 103.2 %]

正規分布の場合、平均値が 0 %に近いと下限が 0 %を下回ることがあります。同様に平均値が 100 %に近いと上限が 100 %を上回ることがあります。その場合、下限は 0 %、上限は 100 %とあり得る値を表記することもあります。

問 11–16

まず、標本比率$\hat{p}$（有効性を示した患者の割合）を計算します。

$$\hat{p} = \frac{\text{有効性を示した患者の割合}}{\text{標本全体の患者数}} = \frac{6}{10} = 0.6$$

次に、Zを 95 %信頼区間におけるZ値に設定します。95 %信頼区間の場合、Z値は 1.96 です。

$$\text{信頼区間} = \hat{p} \pm z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

$$= 0.6 \pm 1.96\sqrt{\frac{0.6(1-0.6)}{10}}$$

$$= 0.6 \pm 1.96\sqrt{\frac{0.6 \cdot 0.4}{10}}$$

$$= 0.925 \pm 1.96\sqrt{0.024}$$

$$\fallingdotseq 0.6 \pm 1.96 \cdot 015 \fallingdotseq 0.6 \pm 0.3$$

%で表せば、60 ± 30 %

または、95 %CI [0.3, 0.9]

%で表せば、95 %CI [30 %, 90 %]

問 11–17

(a) 片側（下側）検定で仮説を立てます。

帰無仮説 (H_0)：新しい治療法による回復期間の平均は標準治療と差がない

対立仮説 (H_1)：新しい治療法による回復期間の平均は標準治療より短縮する

(b)　検定統計量を算出します。

$$z = \frac{\bar{x}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} = \frac{27-30}{\sqrt{\frac{25}{10}}} = \frac{-3}{\sqrt{2.5}} = \frac{-3}{1.581} = -1.90$$

(c) 結論を決めます。

有意水準 5%での片側検定の z 値は約-1.64です。検定統計量の z は、-1.64より小さいため、帰無仮説は棄却され、対立仮説が採択されます。したがって、

新しい治療法が回復期間を短縮するといえます。

問 11–18

(a) 両側検定で仮説を立てます。

帰無仮説 (H_0)：新型ワクチンの入院率抑制効果がない

対立仮説 (H_1)：新型ワクチンには入院率抑制効果がある

(b) 検定統計量を算出します。

$$z = \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} = \frac{0.092-0.12}{\sqrt{\frac{0.12(1-0.12)}{1000}}} = \frac{-0.028}{\sqrt{\frac{0.1056}{1000}}} = \frac{-0.028}{0.0103}$$

$$= -2.718$$

(c) 結論を決めます。

有意水準 5 %のとき、$|z| > 1.96$が棄却域となりますので、H_0 は有意水準 5 %で棄却され、対立仮説が採択されます。したがって、

新型ワクチンの入院率抑制効果があることが示されました。

問 11–19

(a) 両側検定で仮説を立てます。

帰無仮説 (H_0)：新型インフルエンザワクチン接種後の重篤な副反応発生率は許容範囲と差がない

対立仮説 (H_1)：新型インフルエンザワクチン接種後の重篤な副反応発生率は許容範囲でない

(b) 検定統計量を算出します。

$$z = \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} = \frac{0.015-0.008}{\sqrt{\frac{0.008(1-0.008)}{1000}}} = \frac{0.007}{\sqrt{\frac{0.007936}{1000}}}$$

$$= \frac{0.007}{0.00282} = 2.482$$

(c) 結論を決めます。

有意水準５ ％のとき、$|z| > 1.96$が棄却域となりますので、H_0 は有意水準 ５ ％で棄却され、対立仮説が採択されます。
したがって、
新型インフルエンザワクチン接種後の重篤な副反応発生率は許容範囲でないといえます。

問 11–20

(a) 両側検定で仮説を立てます。

帰無仮説 (H_0)：K 病院にかかっている患者の収縮期血圧の平均値は、A 地域の収縮期血圧の平均値と等しい (μ=156 mmHg)

対立仮説 (H_1)：K 病院にかかっている患者の収縮期血圧の平均値は、A 地域の収縮期血圧の平均値と差がある (μ≠156 mmHg)

(b) 検定統計量 t を算出します。

$$t = \frac{161-156}{\frac{18}{\sqrt{36}}} = \frac{5}{\frac{18}{6}} = \frac{5}{3} = 1.67$$

(c) 結論を決めます。

自由度$\nu = n - 1 = 36 - 1 = 35$の t 分布の両側 5%点は、2.030 のため、$|1.67| < 2.030$ですから、帰無仮説は棄却されません。

したがって、K 病院にかかっている患者の収縮期血圧の平均値は、A 地域の収縮期血圧の平均値と差があるといえません。

問 11–21

(a) 両側検定の仮説を立てます。

帰無仮説 (H_0)：新型睡眠導入薬の睡眠時間延長効果は、偽薬投与時の効果と差がない

対立仮説 (H_1)：新型睡眠導入薬の睡眠時間延長効果は、偽薬投与時の効果と差がある

(b) 次に、検定統計量 t を算出します。

$$t = \frac{378-350}{\sqrt{\frac{508.5}{28}}} = \frac{28}{\sqrt{18.1607}} = \frac{28}{4.2615} = 6.570$$

(c) 結論を決めます。

自由度$\nu = n - 1 = 28 - 1 = 27$の t 分布の両側 5%点は、2.052 のため、$|6.57| > 2.052$ですから、帰無仮説は棄却され、対立仮説が採択されます。したがって、
新型睡眠導入薬の睡眠時間延長効果と偽薬投与時の効果とに差があるといえます。

自由度が t 分布表にない場合の対処方法

t分布表は自由度が有限個しか掲載されていないため、必要な自由度が表にない場合があります。そのような場合は、以下の補間法を用いて、必要なt値を推定することができます。

求めたい自由度を ν とします。t分布表にある ν の最も近い小さい自由度をν_1とします。次に、t 分布表にあるν_1より大きい自由度をν_2とします。そして、ν_1に対応する値をt_1、ν_2に対応する値をt_2とします。つまり、$\nu_1 < \nu < \nu_2$の関係が成り立ちます。

⑴逆数補間法

t分布表に自由度 ν の値がないときは、表にあるその前後の自由度の逆数を使って補間します。このとき、ν に対応するt値は以下の式で計算できます。

$$\frac{1}{\nu} = \frac{1}{\nu_1} \cdot p + \frac{1}{\nu_2}(1-p)$$

$$t = t_1 \cdot p + t_2 \cdot (1-p)$$

たとえば、自由度$\nu = 35$での両側 ５ %有意水準の t 値を求めるとします。t 分布表から$\nu_1 = 30$のときの$t_1 = 2.042$、$\nu_2 = 40$ のときの$t_2 = 2.021$を式に代入すると、

$$\frac{1}{35} = \frac{1}{30} \cdot p + \frac{1}{40}(1-p) = \frac{p+3}{120}$$

$$p = 0.4286$$

$$t = 2.042 \cdot 0.4286 + 2.021 \cdot (1 - 0.4286)$$

$$= 0.8752 + 1.1548 = 2.030$$

と求められます。

⑵線形補間法

必要な自由度と近い ２ つの自由度におけるt値を調べ、補間によって推定します。このとき、ν に対応するt値は以下の式で計算できます。

$$t = t_1 + \frac{(t_2-t_1)(\nu-\nu_1)}{\nu_2-\nu_1}$$

たとえば、自由度$\nu = 35$での両側 ５ %有意水準の t 値を求めるとします。 t 分布表から

$\nu_1 = 30$ のときの$t_1 = 2.042$、$\nu_2 = 40$のときの$t_2 = 2.021$を式に代入すると、

$$t = 2.042 + \frac{(2.021 - 2.042)(35 - 30)}{40 - 30}$$
$$= 2.042 + \frac{-0.021 \cdot 5}{10} = 2.031$$

と求められます。この値は近似値ですが、補間によって求めた自由度 35 の *t* 値になります。

補間法は簡便ですが、近似値を与えるだけですので、重要な場合は EXCEL や R などの統計ソフトで正確に計算することをお勧めします。