1

# 偏微分方程式から数値シミュレーションへ

田端正久


第1章　ポアソン方程式による数値シミュレーション

第2章　抽象的変分問題と弱形式

第3章　有限要素法

第4章　誤差解析

## 数値シミュレーションの手順

現象

偏微分方程式で定式化

有限要素スキームの作成

解析領域の要素分割と分割データの作成

剛性行列と右辺ベクトルの作成

大規模連立１次方程式の求解

数値解の可視化

現象のシミュレーション

第 1 章

# ポアソン方程式による数値シミュレーション

$u = u(x_1, x_2)$ を 2 次元有界領域で定義された関数とする．偏微分方程式

$$-\Delta u = f \tag{1.1}$$

は，ポアソン (Poisson) 方程式と呼ばれる．ここに，

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

である．この方程式は数理科学に現れる代表的な偏微分方程式である．種々の複雑な現象の数値シミュレーションの基礎になる．この方程式で表される数値シミュレーションを見てみよう．

## 1.1　円管の流量

図 1.1 の円管の両端の圧力は左端で低く右端で高いとすると，円管内の流体は右から左に流れる．単位時間当たりの流量を求めよう．円管の断面は図 1.2 に示す半径 $a(> 0)$ の円とする．円の内部を

$$\Omega = \{(x_1, x_2);\ x_1^2 + x_2^2 < a^2\} \tag{1.2}$$

**図 1.1**　円管

# 2

# 計算の信頼性評価

中尾充宏

第1章　計算機による数値計算の信頼性とは

第2章　有限次元の問題の精度保証

第3章　常微分方程式の解の精度保証

第4章　偏微分方程式の解の精度保証

テーマ扉（前ページ）の「計算の信頼性評価」という言葉から読者は何を想像されるであろうか?

すぐその下には，第１章はともかくとして，第２章以下には何やら親しみにくい用語が並んでおり，これはとても容易に理解できそうにもない，という印象をもたれたのではなかろうか．確かに本書の内容がそのような「ややこしい」数学理論とかかわっているのは事実である．しかしながら，産業界での様々な数値シミュレーションに限らず，日頃私たちが新聞紙上やテレビ放送などで目にする「コンピュータによる計算結果」が，本当に信頼できるのかどうかを突きつめていくと，すべて本書で指摘するように厳密な数学の問題に帰着するのである．

本書を一読し，計算機による数値計算で到達できることと，そうでないことを的確に把握しておくことは，日常数値計算に従事する人々にはもちろん，そうでない一般の人々にとっても意義深いことであろう．また，さらに進んで計算機が数学的問題の解を厳密に追求するための手段となりうること，そのために数値計算という立場から何をどうすればよいかを理解してもらうことも，本書の重要な役割の一つであろう．

第1章

# 計算機による 数値計算の信頼性とは

ここでは，まずわれわれがコンピュータ（計算機）による数値計算によって問題を解く場合，その答えがいかに当てにならないかを極端な例をあげて示し，それを回避するためにどのような技術が必要となるかについて述べたい．

## 1.1　コンピュータ演算と誤差

コンピュータ（計算機）を用いた数値計算の信頼性を疑わせるような結果として，以下の3つの例をあげよう．

**例1：算術式の値**

$x = 192119201$，$y = 35675640$ に対し，式

$$z = \frac{1682xy^4 + 3x^3 + 29xy^2 - 2x^5 + 832}{107751}$$

の値を計算すると, 真の値 $z = 1783$ に対して, 計算結果は $\widetilde{z} = -5.385\cdots\times 10^{22}$ となった．

**例2：連立1次方程式**

$$\begin{aligned} 64919121x - 159018721y &= 1 \qquad (1.1) \\ 41869520.5x - 102558961y &= 0 \qquad (1.2) \end{aligned}$$

このとき，真の解は：　$x = 205117922$，$y = 83739041$ であるのに，

計算結果は：　$\widetilde{x} = 0.987\cdots\times 10^{-1}$，$\widetilde{y} = 0.403\cdots\times 10^{-1}$

となった．

なお，これらの例では，いずれも15桁の有効数字（いわゆる倍精度浮動小数点数）をもつコンピュータが用いられている．