1

パターン形成の数理

栄 伸一郎

図 1　さまざまな生物の表皮模様

（シマウマ，トラ，キリン，ヘビは多摩動物公園にて，蝶は自宅にて著者が撮影）

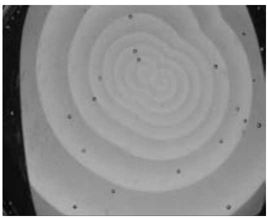

図 2　化学反応系に現れるらせんパターン

（写真提供：九州大工学研究院 甲斐研究室猪本特任准教授）

第 1 章

常微分方程式の基礎

この章では 1.5 節の話を理解するために必要な最低限の知識のみを証明なしに紹介する．より詳しく知りたい読者は, 第 4 章で紹介する [20] などを参照されたい．また，この章では簡単のため，特に断らない限り, 関数はすべて変数に関して滑らかとする．ここで滑らかとは，必要なだけ微分することができることを意味するものとする．また，時間発展する現象を意識して，独立変数は t を用いる．最後に，この章に限らず以降すべての章で，$\mathbb{R}$ は実数全体の集合を表し，$\mathbb{R}^N$ とある場合は，N は自然数で $\mathbb{R}^N$ は N 次元の実ベクトル空間を表すものとする．

1.1　常微分方程式の例

$u = u(t)$ を t に関して滑らかな 1 変数関数とするとき，その 1 階導関数を u'，$\dot{u}$ や $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ などと表す．高階導関数に対しても同様に $u^{(n)}$ や $\dfrac{\mathrm{d}^n u}{\mathrm{d}t^n}$ などと表す．関数 $u = u(t)$ に対して u およびその導関数 u'，u''，$\cdots$ $u^{(n)}$ の間の関係式 $f(u, u', \cdots, u^{(n)}) = 0$ を **(常) 微分方程式**という．いくつかの例を示そう．

例 1.1. (自由落下).
質量 m の質点が自由落下するとする．このとき，落下しはじめてから t 時刻後の質点の高さを $h(t)$ とすると，ニュートンの第 2 法則により $m\ddot{h} = -mg$ を満たす．ここで，g は重力加速度である．これは最も簡単な微分方程式の例であり，この微分方程式を満たす関数 $h(t)$ は $h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + at + b$ と求めることができる．定数 a と b は，初期条件と呼ばれる，ある時刻 $t = t_0$ における質点の状態によって決まる．いまの場合，自由落下であるから，初期速度

2

技術者のための微分幾何入門

山田光太郎

本編は曲線・曲面の微分幾何学の「入門の入門」である．このような入門書は「難しいことを何とかわかった気にさせるように」書くのが普通であるが，ここではあえてそのような立場をとらず，数学的な内容を多く盛り込み過ぎないかわりに，読者をわかった気にさせる「ごまかし」をなるべく避けるようにした．一方，読者が自ら確認し，それを通して理解する機会を用意するよう心がけたので，思いのほか「問い」や「問題」が多くなった．面倒臭がらず，紙，鉛筆，キーボードを使って手を動かしてもらいたい．十分時間をかけて，自分の手と頭を使って得た知識こそが応用の場で生きると確信している．

昨今は大学でも「わかりやすい」講義を求める声が大きい．一方，ある学生が筆者の講義について「その場でわかった気になったので安心していたら，試験直前にわかっていないことに気づいた」と評したことがある．わかりやすい，ということはかえって理解の邪魔になるのでは，と猛省した次第である．学生の意見をフィードバックする，という風潮であるから，「わかりにくい講義」を日々目指しているところであり，それに対する学生の意見は賛否両論である．わかりにくい講義と同様の立場で書かれた本編であるが，読者が微分幾何学と技術をつなげるための入り口としてほんのわずかでもお役に立てば幸いである．

誤植など，本編に関連する情報を

http://kotaro.math.kyushu-u.ac.jp/

で公開している．随時更新しているので，参照されたい．

謝辞

濱田龍義さん（福岡大学理学部，KNOPPIX/Math プロジェクト）には貴重なお時間をさいて原稿に目を通してご意見をいただきました．心より感謝いたします．

第 1 章

曲線・曲面の表示

まずは平面曲線や曲面を数式で表示する方法を知ろう．さらに，コンピュータで可視化―絵に描く―することで，表示と図形の関係をつかんでほしい．

1.1 関数のグラフ

■1 変数関数のグラフとしての曲線　中学校や高等学校で学んだように，何回でも微分可能な関数 $f(x)$ に対して，$y = f(x)$ のグラフ，すなわち点 $\big(x, f(x)\big)$ の集まりは座標平面上のなめらかな曲線となる．

例 1.1. 関数のグラフをコンピュータを用いて実際に描こう．ここでは汎用の対話式グラフ描画ソフトウェアである gnuplot （付録の第 2 節）を用いる．Gnuplot のプロンプトから

```
plot x**3
```

と入力すると，図 1.1 (1) のような $y = x^3$ のグラフが描かれる．デフォルトの描画範囲は $-10 \leq x \leq 10$ でグラフ全体が画面に納まるように縦横のスケールの比が調整されるので見慣れたグラフには見えない．そこで，いくつかの設定をして調整する（図 1.1 (2)）：

```
set size ratio -1     # 横軸，縦軸の単位長を一致させる
set xtics 1 ; set ytics 1 ; # x,y 軸の目盛りの間隔は 1
set zeroaxis          # 座標軸を描く
unset key             # グラフの凡例をつけない
plot [-1:1] [-1:1]  x**3 with lines linewidth 4
         # x 軸 y 軸の描画範囲は -1 から 1，線の幅を太く
```

マニュアルを見ながら，設定をいじって遊んでみよう．