1
最適化法

川崎英文

光が最短経路を進むように，また環境に適合した生物が繁栄するように，自然は最適性に基づく法則に従って変化している．人や組織も同様に，時に無意識のうちに，時に組織的に最適な選択肢を選びながらその営みを続けている．この最適性を切り口に自然を記述する数学が変分法であるのに対して，同様の切り口で社会を記述する数学が最適化法である．

最適化法では高度に発達した手法が有効であることも，素朴な手法が長い年月を経てなお強力なこともある．たまたま最初に素朴な手法を目にした人は，もっと気の利いた方法があるのではないかと思うだろう．また，本格的な手法の難解さに閉口した人は手軽な手法を探すかもしれない．これらの要望に応えるべく，本書では，時の試練に耐えた標準的な最適化手法を初心者向けに解説する．本書を通して，最適化法が自然なアイディアに基づいていることを把握していただければ幸いである．

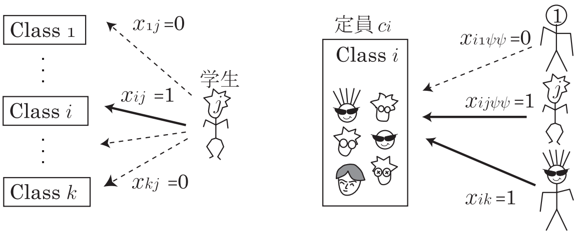

図 1.2　クラス i を学生 j が選ぶとき $x_{ij}=1$ と定める

数を定めると，教室の定員制約と 1 人の学生が 1 つのクラスに属するという制約は，それぞれ次のように表される．

$$\sum_{j=1}^{900} x_{ij} \leqq c_i \quad (1 \leqq i \leqq 14), \qquad \sum_{i=1}^{14} x_{ij} = 1 \quad (1 \leqq j \leqq 900).$$

ここで問題となるのが満足度を測る指標である．最適化法では，この指標を**目的関数**と呼ぶ．教室の容量制限があるため，全員の希望を叶えることはできない．したがって，どのような目的関数を用意しようとも，一部の学生には不満が残ることになる．このように，数学の範疇に収まらない要素を現実の諸問題は含むことが多い．そこで，K 教授は学生の満足度を

$$p_{ij} := \begin{cases} 100 & \text{学生 } j \text{ の第 1 希望はクラス } i \\ 40 & \text{学生 } j \text{ の第 2 希望はクラス } i \\ 1 & \text{学生 } j \text{ の第 3 希望はクラス } i \\ -10^6 & \text{その他} \end{cases}$$

で表し，目的関数 $\sum_{i=1}^{14}\sum_{j=1}^{900} p_{ij}x_{ij}$ の最大化によりクラス編成を行なった．変数 x_{ij} のとり得る値が 0 か 1 であるため，この問題は離散最適化問題になり，通常は簡単には解けない．ところが，制約条件を $0 \leqq x_{ij} \leqq 1$ と緩和すると，効率的な解法が確立された形計画問題として定式化される．幸いなことに，この線形計画問題の最適解は $0,1$ の値しかとらないことが知られている．実際，最適解は連立線形方程式を解くことにより得られるが，連立線形方程式の係数行列が特殊な形をしているため，クラメルの公式の分母に現れる行列式は ± 1 の値をとり，最適解は整数値になるのである．

2

数理ファイナンスへの確率解析入門

谷口説男

20 世紀最大の数学的偉業の 1 つである確率解析は，1942 年に伊藤清によって創始され，1950 年代に爆発的に進展した．1960 年代後半には，確率解析の数理ファイナンスへの応用がはじまり，1970 年代はじめに有名なブラック-ショールズの価格公式が結実する．近代確率論の誕生からブラック-ショールズ・モデルに至るまでの 50 年間をたどる小旅行にいざ出かけよう，必要な装備は道すがらもとめることにして．

に述べるように，数学的には，(4.7) を満たす y の最大値と (4.8) を満たす z の最小値が一致することに対応している．

定理 4.4. 派生証券 F は $E_Q[F^2] < \infty$ を満たすとする．$\mathcal{A}_B$ を (4.7) を満たす $\theta \in \mathcal{H}^2$ が存在する $y \in \mathbb{R}$ の全体とし，$\mathcal{A}_S$ を (4.8) を満たす $\theta \in \mathcal{H}^2$ が存在する $z \in \mathbb{R}$ の全体とおく．次の等式が成り立つ．

$$E_Q[e^{-r\tau}F] = \max \mathcal{A}_B = \min \mathcal{A}_S.$$

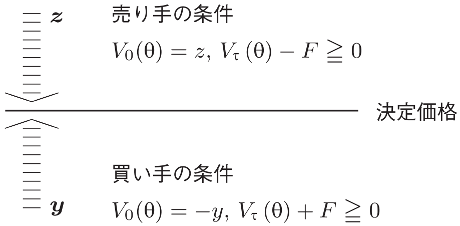

図 4.4　売り手と買い手の歩み寄り

証明　定理 4.3 の $\theta \in \mathcal{H}^2$ に対し，$V_\tau(-\theta) + F = V_\tau(\theta) - F = 0$ である．よって $E_Q[e^{-r\tau}F] \in \mathcal{A}_B \cap \mathcal{A}_S$ となる．

$y \in \mathcal{A}_B, z \in \mathcal{A}_S$ とする．$\theta_B, \theta_S \in \mathcal{H}^2$ は，$V_0(\theta_B) = -y$, $V_\tau(\theta_B)+F \geqq 0$, $V_0(\theta_S) = z$, $V_\tau(\theta_S)-F \geqq 0$ を満たすとする．このとき $\theta_B+\theta_S \in \mathcal{H}^2$ であり，さらに $V_\tau(\theta_B+\theta_S) \geqq 0$ を満たす．系 4.1 と定理 3.1 より，$\{V_t^*(\theta_B+\theta_S)\}_{t\in[0,\tau]}$ は Q のもとマルチンゲールとなるから，

$$0 \leqq E_Q[V_\tau^*(\theta_B + \theta_S)] = E_Q[V_0^*(\theta_B + \theta_S)] = z - y.$$

ゆえに $z \geqq y$．よって，$\sup \mathcal{A}_B \leqq \inf \mathcal{A}_S$ となり，望む等式を得る．　□

$E_Q[F^2] < \infty$ を満たす派生証券 F に対し，$E_Q[e^{-r\tau}F]$ を時刻 0 における **$\boldsymbol{F}$ の価格**といい，$\boldsymbol{p(F)}$ と表す．$E_Q[e^{-r\tau}F]$ という表示は抽象的であるが，特別な F については次のように具体的な積分により求めることが可能となる．

定理 4.5 (価格公式). $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を連続関数とする．$k \in \mathbb{N}$ が存在し $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|/(1 + |x|^k) < \infty$ が成り立つと仮定する．$F = f(S_\tau)$ とお