

### 3.3 偏微分と多重積分

#### 偏微分

3つの独立変数  $x, y, z$  の関数  $f(x, y, z)$  を考えるとき、変数  $y$  と  $z$  を固定して  $x$  で微分する演算を  $x$  での**偏微分**といい、その導関数を  $\frac{\partial f}{\partial x}$  と書く。このとき、 $\frac{\partial f}{\partial x}$  は、

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x} \quad (3.24)$$

で定義される。また、 $x$  と  $z$  を固定したときの  $y$  に関する導関数を  $\frac{\partial f}{\partial y}$ 、 $x$  と  $y$  を固定したときの  $z$  に関する導関数を  $\frac{\partial f}{\partial z}$  と書く。さらに、2階偏導関数も同様に定義され、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, \quad \dots \end{aligned}$$

と書かれる。

#### 例題3.5 偏微分の計算

$f(x, y, z) = 3x^2y + 4yz^3$  の偏導関数  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$  を求めよ。

解

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 + 4z^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} (12yz^2) = 12z^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} (3x^2 + 4z^3) = 12z^2$$

となり、 $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$  であることがわかる。■

一般に、 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  と  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  がともに連続関数であれば、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad (3.25)$$

となる。ここで、 $x \rightarrow y, y \rightarrow z$ 、あるいは、 $x \rightarrow z, y \rightarrow x$  としても同様である。

#### 多重積分

変数  $x$  に対して、値が1つに決まる関数を**1価関数**という。

1変数  $x$  の1価連続関数  $f(x)$  に対する定積分は、2.3節で述べたように、 $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$  として、

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k$$

で与えられることは、すでによく知っているであろう。1変数の場合と同様に、2変数  $x, y$  の関数  $f(x, y)$  に関する平面内の領域  $R$  での2重積分は、次のように与えられる。

図3.9のように、平面内の領域  $R$  を  $x$  軸方向に  $n$  分割、 $y$  軸方向に  $m$  分割し、 $x$  軸方向の  $i$  番目、 $y$  軸方向の  $j$  番目の微小領域  $\Delta R_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$ ) の  $x$  軸方向の長さを  $\Delta x_i$ 、 $y$  軸方向の長さを  $\Delta y_j$  とすると、領域  $\Delta R_{ij}$  の面積は  $\Delta x_i \Delta y_j$  と書ける。 $\Delta R_{ij}$  での関数  $f(x, y)$  の値を  $f(x_i, y_j)$  とするとき、

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i, y_j) \Delta x_i \Delta y_j$$

を  $x, y$  に関する領域  $R$  での**2重積分**という。

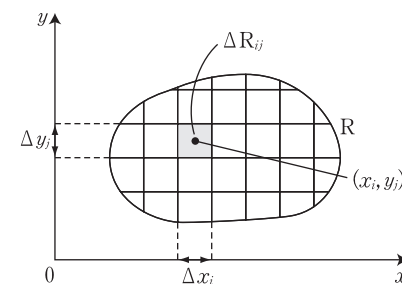


図3.9 2重積分

同様に、3変数  $x, y, z$  の関数  $F(x, y, z)$  に関する空間内の領域  $R$  での**3重積分**は、

$$\iiint_R F(x, y, z) dx dy dz = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty \\ l \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l F(x_i, y_j, z_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

で与えられる。