$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = \varepsilon_0\mu_0\omega E_0 \cos\left(kx - \omega t + \phi\right)$$

となり，積分して，

$$B_z(x, t) = \varepsilon_0\mu_0 c E_0 \sin\left(kx - \omega t + \phi\right) = \frac{1}{c}E_y(x, t)$$

を得る。これは電磁波が，y 方向へ振動する電場と z 方向へ振動する磁場が同位相で伝わる波であることを示している。これより，図 3.3 を描くことができる。■

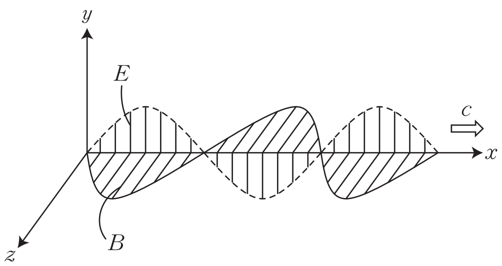

図3.3　電磁波の伝播

ド・ブロイ波の満たす波動方程式と波動関数

ド・ブロイ波の波動関数はどんなだろうか。第 2 章で述べたように，ド・ブロイ波の分散関係は，非相対論において，

$$\omega = \frac{\hbar}{2m}k^2 \tag{2.20}$$

で与えられ，位相速度は波数 k に依存する。今，波動関数を電磁波の式（電場あるいは磁場の式）と同様に，A を定数として，

$$\psi(x, t) = A \sin\left(kx - \omega t + \phi\right) \tag{3.7}$$

とおいてみると，分散関係 (2.20) を得るには，時間 t に関する 1 階微分と位置 x に関する 2 階微分をした式が等しいとおかねばならない。ところが，(3.7) 式の 1 階微分は cos の形になり，2 階微分は sin の形になって，決して等しくはならない。この困難を解決するには，波動関数を複素数にする必要がある。

オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{3.8}$$

を用いて，ド・ブロイ波の波動関数を平面波（波長すなわち波数の定まった波）として，

$$\psi(x, t) = A\exp[i(kx - \omega t)] \tag{3.9}$$

とおいてみる。ここで，振幅 A は複素定数である。そうすると，1 階微

分であっても 2 階微分であっても，式の形は変わらない。そこで波動方程式を，

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x, t) \tag{3.10}$$

と書けば，分散関係 (2.20) が成り立つとき，波動関数 (3.9) が波動方程式 (3.10) を満たすことがわかる。(3.10) 式を **1 次元自由粒子のシュレーディンガー方程式**という。

例題3.2　シュレーディンガー方程式を満たす波動関数

分散関係 (2.20) が成り立つとき，波動関数 (3.9) がシュレーディンガー方程式 (3.10) を満たすことを示せ。

解

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x, t) &= i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\{A\exp[i(kx - \omega t)]\} \\ &= \hbar\omega\cdot A\exp[i(kx - \omega t)] = \hbar\omega\cdot\psi(x, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x, t) &= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\{A\exp[i(kx - \omega t)]\} \\ &= \frac{\hbar^2k^2}{2m}\cdot A\exp[i(kx - \omega t)] = \frac{\hbar^2k^2}{2m}\psi(x, t) \end{aligned}$$

より，分散関係 $\omega = \dfrac{\hbar}{2m}k^2$ が成り立つとき，(3.10) 式が成り立つ。■

エネルギー演算子と運動量演算子

微分演算子 $i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}$ を波動関数 (3.9) へ作用させると，

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x, t) = \hbar\omega\psi(x, t) = E\psi(x, t)$$

となり，粒子のエネルギー E が求められる。また，微分演算子 $-i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}$ を波動関数 (3.9) へ作用させると，

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi(x, t) = \hbar k\psi(x, t) = p\psi(x, t)$$

となり，粒子の運動量 p が得られる。ここで，ド・ブロイの関係 (2.16)，(2.18) を用いた。

$i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}$ を**エネルギー演算子**