のとり方によりその形が著しく異なるのに比べ，ラグランジュの運動方程式はスカラー量であるラグランジアン L を別の座標で書き直すだけで，運動方程式はまったく同じ形に書き表すことができる。これにより状況に応じた座標系を自由に設定することができ，力学の問題を解くのを容易にする。次章では 1 個の質点に限らず，より一般的な質点系についてラグランジュの運動方程式が定式化できることを見ていくことにする。

2.2　ラグランジュの運動方程式の例

応用上重要なラグランジュの運動方程式の例をいくつか見ていこう。これ以降，時間微分 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$ の代わりにドット記号 $\dot{x}, \ddot{x}$ を多用することにする。

例2.1　単振動

ばねのポテンシャルエネルギーは $U = \dfrac{1}{2}kx^2$ なので，ラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \tag{2.37}$$

で与えられる。ラグランジュの運動方程式は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = m\ddot{x} + kx = 0 \tag{2.38}$$

となる。

例2.2　平面内における中心力ポテンシャルによる質点の運動

平面内における中心力ポテンシャルのもとでの質点の運動を考える。平面極座標 (r, θ) での運動エネルギーは

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \tag{2.39}$$

となる。中心力ポテンシャルを $U(r)$ とすると，ラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r) \tag{2.40}$$

で与えられる。動径座標 r についてのラグランジュの運動方程式は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + \frac{\mathrm{d}U(r)}{\mathrm{d}r} = 0 \tag{2.41}$$

となる。一方，角度座標 θ についての運動方程式は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mr^2\dot{\theta}) = 0 \tag{2.42}$$

となる。

例題2.1　極座標でのラグランジュの運動方程式

空間内における中心力ポテンシャルのもとでの質点の運動を記述するラグランジアンは極座標 (r, θ, φ) を用いると

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2) - U(r) \tag{2.43}$$

と書ける。$U(r)$ は中心力ポテンシャルである。これから r，θ，φ についてのラグランジュの運動方程式を書き下せ。

解　運動方程式は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - mr\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2 + \frac{\mathrm{d}U(r)}{\mathrm{d}r} = 0 \tag{2.44}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mr^2\dot{\theta}) - mr^2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2 = 0 \tag{2.45}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mr^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}) = 0 \tag{2.46}$$

となる。 ■

一様な磁場中の荷電粒子の運動

静電ポテンシャル Φ と z 軸方向に一様な磁束密度 $\boldsymbol{B} = (0,\ 0,\ B)$ がある場合のラグランジアンを求めよう。磁束密度は速度に依存する力をもたらすので，ポテンシャルに速度に依存する項を付け加えなければならない。

例題2.2　磁場中の荷電粒子の運動方程式

ラグランジアン

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{eB}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}) - e\Phi \tag{2.47}$$

から運動方程式を求めよ。

解

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} - \frac{eB}{2}y$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + \frac{eB}{2}x \tag{2.48}$$