

I フーリエ級数と フーリエ変換

1 章では、一定の時間で同じ波形を繰り返す周期関数を三角関数の級数和で表すフーリエ級数展開について学びます。

2 章では、1 章で学ぶフーリエ級数展開を複素関数表現することを学びます。また、偏微分方程式がフーリエ級数展開を応用して解くことができることを学びます。

3 章では、フーリエ級数展開の考え方を拡張して非周期関数に適用できるフーリエ変換への理解を深めます。さまざまな関数についてのフーリエ変換を考えていきます。

4 章では、複数の関数の和や、微分、積分に対するフーリエ変換がどのような結果となるか、基本的な性質に触れていきます。

5 章では、2 つの関数の積分の一種である畳み込み積分のフーリエ変換を学ぶことによって、時間と周波数それぞれの計算が強く関係していることを理解します。

6 章では、5 章に関連して、時間関数の積分が周波数の関数の積分に置き換えられる例としてパーセバルの等式を学びます。また、同様の例として 2 つの関数の関連性の強さを導き出す自己相関関数について、理解を深めます。

3 非周期関数に対する処理：フーリエ変換

要点

1. 複素フーリエ級数展開から、非周期関数に用いるフーリエ変換の公式が導出できる。
2. 非周期関数に対するフーリエ変換の公式は、以下で与えられる。

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

また逆フーリエ変換は、

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

で与えられる。

準備

1. 複素フーリエ級数展開の周期 T を無限大に変えた場合の数式について考えてみよ。
2. 三角関数や矩形関数など、いろいろな関数のもつ周波数成分を考えてみよ。

第1章では、周期関数とその基本周波数および整数倍の周波数をもつ正弦関数・余弦関数で級数展開することを学んだ。しかしながら、一般的には周期関数でない非周期関数が多いので、本章では非周期関数を周波数成分で表現するための数学的手法、フーリエ変換について学ぶこととする。

3.1 時間領域と周波数領域の関係

時間的に強度が変化する波形は、周期関数の場合は第1章で示したように周期で決まる基本周波数およびその整数倍の三角関数の和で表される。このと

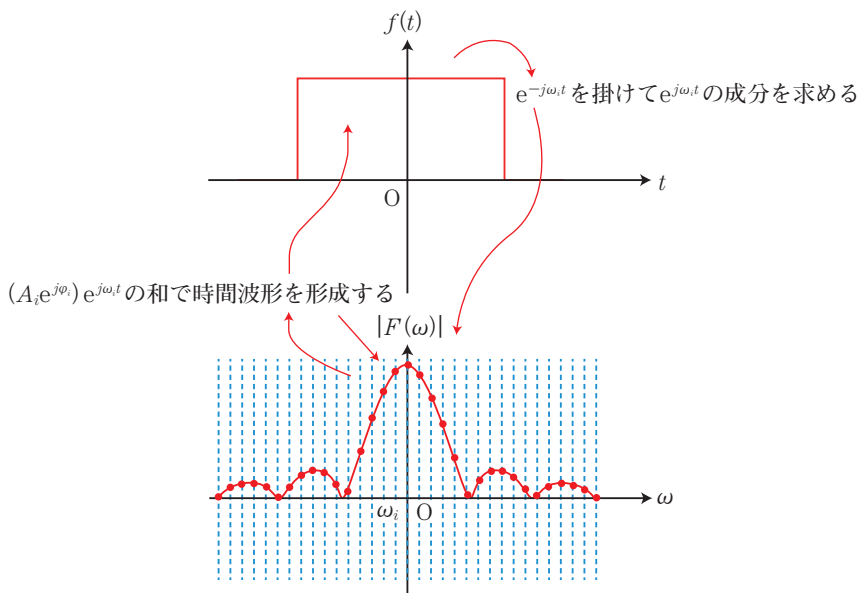


図 3.1 時間波形と周波数スペクトルの変換関係

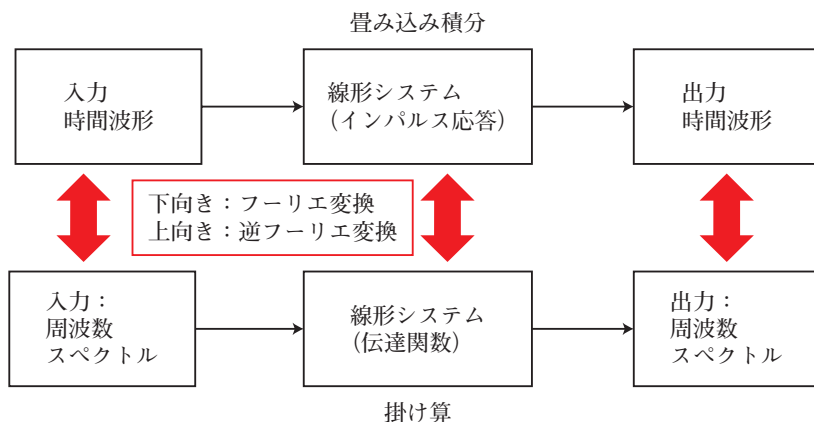


図 3.2 時間領域と周波数領域の対応関係

き、信号のもつ周波数成分の強度分布を**周波数スペクトル**と呼ぶ。図 3.1 に時間波形と周波数スペクトルの変換関係を示している。以下の詳細は専門書に譲るが、第 1 章では三角関数で表現したフーリエ級数展開を第 2 章では複素数で表してきた。波形の振幅を A_i 、基準となる座標(時間)からのずれ(位相)を

φ_i とすると、周波数成分は $A_i e^{j\omega_i t} e^{j\varphi_i}$ で表される。ただし ω_i は角周波数、 t は時間を示している。時間波形を構成する周波数成分の大きさ(振幅 A_i 、位相 $e^{j\varphi_i}$)を求めるために、 $e^{-j\omega_i t}$ を掛ける。また、周波数成分の振幅 A_i 、位相 $e^{j\varphi_i}$ から時間波形を求めることができる。この対応関係は図 3.2 のように表すことができる。一方、時間応答が時間に関係なく一定であるシステムを**線形システム**と呼び、その時間応答(**インパルス応答**とも呼ぶ)を用いて出力時間波形を得ることもできる。時間領域と周波数領域の数学的解析を結びつけるのが、以降に学ぶフーリエ変換と逆フーリエ変換である。

3.2 フーリエ変換の定義

非周期関数は、周期関数のフーリエ級数展開における周期 T を無限大にした状態(周期関数の 1 周期の範囲を無限に広げた状態)と考えることができる。このとき、級数展開の隣接要素間の周波数差は $\frac{1}{T}$ であるから、これは 0 に漸近することは明らかである。したがって、複素フーリエ級数展開において Σ で表現された部分は積分におき換えることができる。

改めて式 (2.7) を示す。

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) e^{-j\frac{2n\pi}{T}\tau} d\tau$$

これを式 (2.6) に代入すると、

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) e^{-j\frac{2n\pi}{T}\tau} d\tau \right) e^{j\frac{2n\pi}{T}t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) e^{j\frac{2n\pi}{T}(t-\tau)} d\tau \right) \end{aligned}$$

$\omega_n = \frac{2n\pi}{T}$ と定義すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2(n+1)\pi}{T} - \frac{2n\pi}{T} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} (\omega_{n+1} - \omega_n) \end{aligned}$$

と書ける。 $T \rightarrow \infty$ として、 $\omega_{n+1} - \omega_n \approx d\omega$ とおくと、

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{j\frac{2n\pi}{T}(t-\tau)} d\tau \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right) e^{j\omega t} d\omega
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

ここで,

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \tag{3.2}$$

とおく (以下で用いるため, τ を t におき換えた) と, 式 (3.1) から

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \tag{3.3}$$

となる.

$F(\omega)$ は非周期関数 $f(t)$ の周波数成分を表現したものであり, 式 (3.2) を $f(t)$ のフーリエ変換 (または周波数スペクトル), 式 (3.3) を $F(\omega)$ の逆フーリエ変換と呼ぶ.

3.3 代表的なフーリエ変換

以下, よく使われる関数のフーリエ変換を見ていこう.

① デルタ関数

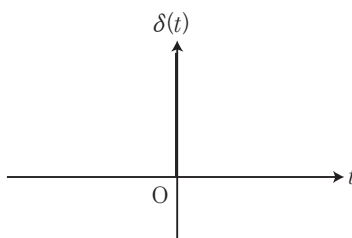


図 3.3 デルタ関数

デルタ関数 (図 3.3) とは, 以下の性質 (a) ~ (c) を満たす関数と定義される.

$$(a) \quad \delta(t) = \begin{cases} \infty & (t = 0) \\ 0 & (t \neq 0) \end{cases} \tag{3.4}$$

$$(b) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (3.5)$$

$$(c) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0) \quad (f(t) \text{ は任意の関数}) \quad (3.6)$$

(c)を用いると,

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1 \quad (3.7)$$

が得られる。よって、デルタ関数は全周波数成分をもち、その振幅は一定であることがわかる。

逆に、式(3.7)の結果を逆フーリエ変換すると、もとのデルタ関数と一致することになるので、

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega \quad (3.8)$$

となる。

② 直流

時間的に一定な数値の関数(直流波形)を

$$f(t) = E \quad (3.9)$$

で表す。このとき、 $f(t)$ のフーリエ変換は、4.5節で説明する対称性を用いて、

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E e^{-j\omega t} dt = 2\pi E \delta(\omega) \quad (3.10)$$

と書ける。すなわち、直流波形は $\omega = 0$ しか角周波数成分をもたないことがわかる。

③ 正弦波

正弦波(余弦関数)の数式は以下の通りである。

$$f(t) = \cos \omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} \quad (3.11)$$

このときのフーリエ変換を計算すると、

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (\cos \omega_0 t) (e^{-j\omega t}) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} (e^{-j\omega t}) dt \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \{e^{-j(\omega-\omega_0)t} + e^{-j(\omega+\omega_0)t}\} dt = \pi (\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0))
\end{aligned}$$

である。ここで式(3.10)の関係を用いている。よって、角周波数成分は $\omega = \omega_0, -\omega_0$ の2箇所に存在することになる。 ω_0 だけでないことに注意してほしい。

例題 3.1

図 3.4 の孤立波のフーリエ変換を求めよう。この波形は、図 1.1 の 1 周期のみを取り出した孤立波に相当し、以下で表現される。

$$f(t) = \begin{cases} A & \left(-\frac{t_w}{2} \leq t < \frac{t_w}{2}\right) \\ 0 & \left(t < -\frac{t_w}{2}, t \geq \frac{t_w}{2}\right) \end{cases} \quad (3.12)$$

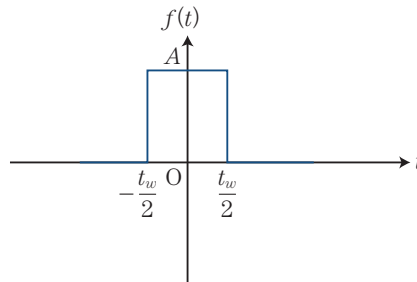


図 3.4 孤立波の波形

答

式(3.12)をフーリエ変換の定義式(3.2)に代入して、

$$\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\
&= \int_{-\frac{t_w}{2}}^{\frac{t_w}{2}} A e^{-j\omega t} dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{A}{-j\omega} e^{-j\omega t} \right]_{-\frac{t_w}{2}}^{\frac{t_w}{2}} \\
&= \frac{A}{-j\omega} \left(e^{-j\omega \frac{t_w}{2}} - e^{j\omega \frac{t_w}{2}} \right) \\
&= \frac{2A}{\omega} \frac{\left(e^{j\omega \frac{t_w}{2}} - e^{-j\omega \frac{t_w}{2}} \right)}{j2} = At_w \frac{\sin\left(\omega \frac{t_w}{2}\right)}{\left(\omega \frac{t_w}{2}\right)} \quad (3.13)
\end{aligned}$$

波形を図 3.5 に示す.

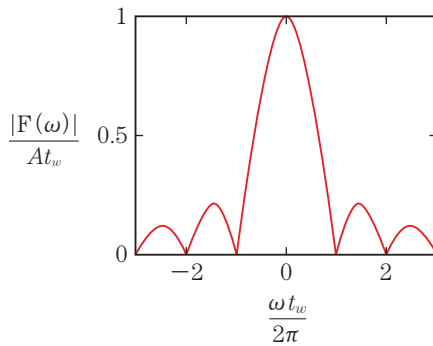


図 3.5 図 3.4 のフーリエ変換波形

3.4 フーリエ積分

$f(t)$ が実関数の場合、フーリエ変換・逆フーリエ変換を実関数の積分形で表現することができる。式 (3.2)、式 (3.3) を変形して、その積分形を求めよう。

まず式 (3.2) において指数関数をオイラーの公式を用いて変形すると、

$$\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (\cos \omega t - j \sin \omega t) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt \quad (3.14)
\end{aligned}$$

となる。式 (3.14) の右辺第 1 項および第 2 項の積分部分を $A(\omega)$ 、 $B(\omega)$ とおくと、

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt \quad (3.15)$$

$$B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt \quad (3.16)$$

となる. $A(\omega)$, $B(\omega)$ をそれぞれフーリエ余弦変換, フーリエ正弦変換と呼ぶ.

$A(\omega)$ に対して $A(-\omega) = A(\omega)$ が成り立つので, $A(\omega)$ は変数 ω に対して偶関数である. 一方, $B(\omega)$ に対しては, $B(-\omega) = -B(\omega)$ が成り立つので, $B(\omega)$ は変数 ω に対して奇関数である.

式(3.3)より,

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{A(\omega) - jB(\omega)\} (\cos \omega t + j \sin \omega t) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{A(\omega) \cos \omega t + B(\omega) \sin \omega t\} d\omega \\ &\quad + \frac{j}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{A(\omega) \sin \omega t - B(\omega) \cos \omega t\} d\omega \end{aligned} \quad (3.17)$$

$A(\omega) \sin \omega t$, $B(\omega) \cos \omega t$ はともに奇関数であり, ω に対する積分は偶関数となるので, 式(3.17)の右辺第2項は0となる.

よって,

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{A(\omega) \cos \omega t + B(\omega) \sin \omega t\} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \{A(\omega) \cos \omega t + B(\omega) \sin \omega t\} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \cos \omega t \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos \omega \tau d\tau + \sin \omega t \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \sin \omega \tau d\tau \right\} d\omega \end{aligned}$$

三角関数の加法定理を用いて,

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos \omega (\tau - t) d\tau d\omega \quad (3.18)$$

が成り立つ. これを $f(t)$ のフーリエ積分と呼ぶ.

3.5 フーリエ変換の存在

$f(t)$ のフーリエ変換が存在するための条件として, 以下の定理が知られてい

る.

【定理】

関数 $f(t)$ の絶対値の積分 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$ が収束する $\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \right)$ が成立する) とき, $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ が存在する.

展開

問題 3.1 次の正弦波のフーリエ変換を求めよ.

$$f(t) = \sin \omega_0 t$$

問題 3.2 次の関数 $f(t)$ のフーリエ変換を求めよ.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ e^{-at} & (t \geq 0) \end{cases}$$

ただし $a > 0$ とする.

問題 3.3 次の関数 $f(t)$ (**ガウス関数**という) のフーリエ変換を求めるため, 以下の小問に答えよ.

$$f(t) = e^{-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^2}$$

(1) $F(\omega)$ の定義式に上記の $f(t)$ を代入して, 両辺を ω で微分せよ. その結果,

$$\frac{dF(\omega)}{d\omega} = -\frac{\sigma^2 \omega}{2} F(\omega)$$

となることを証明せよ. ただし, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^2} dt = \sigma\sqrt{\pi}$ を利用してよい.

(2) (1) の結果を利用して, $F(\omega)$ を導出せよ.

問題 3.4 次の関数 $f(t)$ のフーリエ変換を求めよ.

$$f(t) = \begin{cases} A(t+T) & (-T \leq t < 0) \\ A(T-t) & (0 \leq t < T) \\ 0 & (t < -T, t \geq T) \end{cases}$$

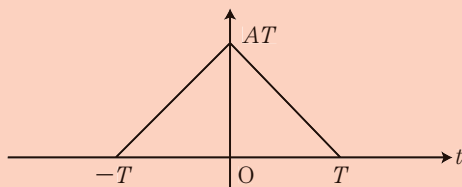


図 3.6 問題 3.4 の三角波

確認事項 I

1 章 周期関数に対する三角関数表現：フーリエ級数

- ☐ フーリエ級数展開とは何かを理解している。
- ☐ フーリエ級数展開の係数が求められる。
- ☐ さまざまな周期関数のフーリエ級数展開が求められる。
- ☐ ギブス現象を理解している。

2 章 フーリエ級数展開の複素関数表示への展開と応用

- ☐ オイラーの公式を用いて複素フーリエ級数展開の定義式が求められる。
- ☐ 複素フーリエ係数が求められる。
- ☐ さまざまな周期関数の複素フーリエ級数展開が求められる。
- ☐ 複素フーリエ級数展開から実関数の級数展開への変換ができる。
- ☐ 偏微分方程式を変数分離形の解と仮定してフーリエ級数展開形の解を求められる。

3 章 非周期関数に対する処理：フーリエ変換

- ☐ 周波数スペクトル・インパルス応答・線形システムを理解している。
- ☐ 複素フーリエ級数展開から非周期関数のフーリエ変換の公式が導出できる。
- ☐ フーリエ変換・逆フーリエ変換の式を理解している。
- ☐ さまざまな関数のフーリエ変換が求められる。
- ☐ フーリエ積分を理解している。

4 章 フーリエ変換の基本性質

- ☐ フーリエ変換の基本性質（線形性・相似法則・時間軸／周波数軸上の推移・対称性）を理解している。
- ☐ フーリエ変換の基本性質を、定義式を用いて求められる。

5 章 フーリエ変換と畳み込み積分

- ☐ 畳み込み積分とは何かを理解している。
- ☐ 畳み込み積分のフーリエ変換が求められる。
- ☐ 畳み込み積分とフーリエ変換の関係を理解している。

6 章 時間と周波数の双対性、パーセバルの等式

- ☐ パーセバルの等式を理解している。
- ☐ エネルギー密度、パワースペクトルを理解している。
- ☐ 自己相関関数を理解している。