Ⅱ
勾配・発散・回転

スカラー場やベクトル場について，それらの場の各位置がもつ特徴を考えます．各位置の特徴は微分演算によって求めることが可能です．スカラー場は，各位置にスカラーが存在するだけのものですが，各位置のスカラー間の関係性からベクトルが導かれ（勾配），結果としてスカラー場の各位置の特徴を表すベクトル場が得られます．また，ベクトル場からは，その特徴を表すスカラー場（発散）や，また別の特徴を表すベクトル場（回転）が得られます．

第Ⅱ部では，これらの場がもつ特徴をどのように演算するか，どのような意味があるのかを学びます．

5　スカラー場の勾配

要点

1. スカラー場φの勾配はベクトルとなり，これを $\mathrm{grad}\,\varphi = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}$ または$\nabla\varphi$と表す.
2. 等位曲線や等位面は，空間上で同じスカラー値をもつ.
3. 勾配ベクトルの向きは，法線ベクトルの向きに等しい.
4. スカラー場の勾配の演算に関して成り立ついくつかの基本法則が存在する.

準備

1. 偏微分について復習する.
2. ベクトルの内積を復習する.
3. ベクトルの正規化(単位ベクトル化)を復習する.

5.1　スカラー場の勾配

位置に応じたスカラーが存在する空間を，スカラー場という．たとえば，図5.1 の地形図は，平面空間の位置ごとに高さ(スカラー値)を考えたスカラー場である．ところで，このような地形図では，隣り合った位置の高さが違うと傾

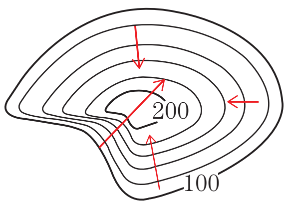

図 5.1　地形図と各位置における勾配

斜(勾配)がある．また，温度のスカラー場も，位置ごとに温度の変化の大きさ(勾配や変化率)が考えられる．これらの勾配や変化率は，方向と大きさをもつのでベクトルである．つまり，スカラー場の勾配は，ベクトル場となる．

位置(x, y, z)でスカラー値をもつスカラー場$\varphi(x, y, z)$を考える．スカラー場$\varphi(x, y, z)$におけるスカラーの空間内の変化率を，**勾配**あるいは**gradient**(グラディエント)という．この勾配は，微小な位置の変化に対するスカラーの変化である微分として表される．方向に応じた微分である偏微分をベクトルの成分と考えて，

$$\mathrm{grad}\,\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

と表す．このように場の各位置の特徴は，微分演算で求められる．

要点1 勾配の演算子 **grad** は，ベクトルの**微分演算子**∇ **(ナブラ)**

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

を考えると，$\mathrm{grad}\,\varphi = \nabla\varphi$と表せる．どちらも同じ意味だが，$\nabla\varphi$の表記を用いることが多い．勾配$\nabla\varphi$は，スカラー場$\varphi(x, y, z)$から求められるベクトルであり，**勾配ベクトル**ともいう．

例題 5.1 $\varphi(x, y) = x^2 + 2y^2$の勾配ベクトルを，点$(0, 0)$，点$(1, 0)$，点$(2, 2)$において求めよ．

答 $\nabla\varphi = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} = 2x\boldsymbol{i} + 4y\boldsymbol{j}$であるから，点$(0, 0)$，点$(1, 0)$，点$(2, 2)$の勾配ベクトルを求めると，それぞれ$\boldsymbol{0}$，$2\boldsymbol{i}$，$4\boldsymbol{i} + 8\boldsymbol{j}$. ■

要点2 平面のスカラー場$\varphi(x, y)$において，定数cに関する方程式

$$\varphi(x, y) = c$$

は，同じスカラー値cをもつ位置だけを抜き出すことを意味し，一般にその抜き出された部分は曲線になるので，これを**等位曲線**という．図 5.1 のような地形図であれば，等高線が等位曲線である．同様に，スカラー場$\varphi(x, y, z)$において，$\varphi(x, y, z) = c$は一般に曲面を表し，これを**等位面**(**等位曲面**)という．

例題 5.2 $\varphi(x, y) = x^2 + 2y^2$における，点$(2, 1)$を含む等位曲線を求めよ．

答 $\varphi(2, 1) = 2^2 + 2\cdot 1^2 = 6$であるから，等位曲線は$x^2 + 2y^2 = 6$. ■

5.2　勾配ベクトルと法線ベクトル

等位面と勾配ベクトルの関係を考える．スカラー場 $\varphi(x, y, z)$ の点 A (x, y, z) を通る等位面 $\varphi = c$ を考え，また，等位面上の点 A に近接した点 B $(x+\delta x,\ y+\delta y,\ z+\delta z)$ を考えて，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \delta x\boldsymbol{i} + \delta y\boldsymbol{j} + \delta z\boldsymbol{k} = \delta\boldsymbol{r}$$

とする．曲線上の 2 点を結ぶ直線は，$\delta x,\ \delta y,\ \delta z \to 0$ のとき，その点における接線を意味するので，ベクトル $\delta\boldsymbol{r}$ は，等位面 $\varphi = c$ の点 A における接線のベクトルになる．

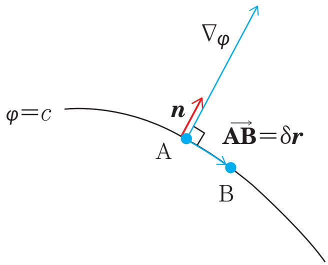

図 5.2　等位曲線と接線および勾配ベクトルの関係

接線のベクトル $\delta\boldsymbol{r}$ と勾配ベクトル $\nabla\varphi$ の関係を内積により求めてみる．内積を，

$$(\nabla\varphi)\cdot\delta\boldsymbol{r} = \delta x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \delta y\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \delta z\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \delta\varphi$$

と表すと，右辺の $\delta\varphi$ は，φ の偏微分，つまり φ の傾きに点 A から近接点 B までの位置の変化量 $\delta\boldsymbol{r}$ を掛けたものであり，これは点 A から近接点 B までの φ の値の変化量を意味している．しかしながら，点 A と点 B はスカラー場 φ の等位面上の点である．すなわち φ の値は同じなので，$\delta\varphi = 0$ である．したがって，

$$(\nabla\varphi)\cdot\delta\boldsymbol{r} = 0$$

が成り立っている．内積が 0 なので，勾配ベクトル $\nabla\varphi$ と接線のベクトル $\delta\boldsymbol{r}$ は垂直の関係にある．

ところで，点 A に対して点 B を 1 つだけ考えると，接線 $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \delta\boldsymbol{r}$ に垂直なベクトルは $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を回転軸として無数に存在してしまう．しかし，点 B は点 A 近傍の等位面上に任意にとれ，勾配ベクトル $\nabla\varphi$ はいずれの $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に対しても垂

直なベクトルであることを考えると，勾配ベクトル$\nabla\varphi$は，点Aにおける等位面に垂直なただ1つのベクトルであることがわかる．

要点3

なお，等位面あるいは等位線に垂直なベクトルを**法線ベクトル**という．つまり，勾配ベクトルは法線ベクトルに方向が一致している．したがって，大きさが1となる**単位法線ベクトル**を$\boldsymbol{n}$とすると，$\boldsymbol{n}$は次のように表される．

$$\boldsymbol{n} = \frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|}$$

法線ベクトルの方向としては等位面に垂直な，正反対の2つの方向が考えられる．方向を確認するため，**方向微分係数**を考える．方向微分係数とは，スカラー場φ上の点A(x, y, z)を始点とする単位ベクトル$\boldsymbol{u} = u_x\boldsymbol{i} + u_y\boldsymbol{j} + u_z\boldsymbol{k}$を考え，変数$t$により位置を変える単位ベクトル$\boldsymbol{u}$上の点B$(x + tu_x,\ y + tu_y,\ z + tu_z)$のスカラー値$\varphi$の変化率を，$t$を0に近づけて求めたものである．つまり，$\boldsymbol{u}$方向の方向微分係数$\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}u}$は次のように表される．

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}u} &= \lim_{t\to 0}\frac{\varphi(x + tu_x, y + tu_y, z + tu_z) - \varphi(x, y, z)}{t} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(x + tu_x, y + tu_y, z + tu_z)\Big|_{t=0}\end{aligned}$$

この方向微分係数$\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}u}$が正であれば，$\boldsymbol{u}$方向に$\varphi$の値が増加することを意味する．

合成関数の微分法を用いると，上記最右辺は

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

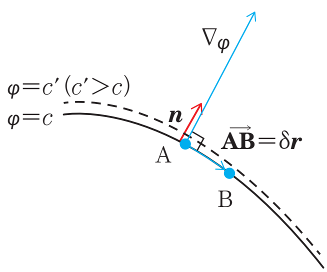

図5.3　勾配ベクトルおよび法線ベクトルの方向

となる．ここで，たとえば x 方向については，$\mathrm{d}x = u_x \mathrm{d}t$ であるから，結局

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}u} = u_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + u_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + u_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \boldsymbol{u} \cdot (\nabla \varphi)$$

と表せる．

この方向微分係数を用いて，単位ベクトル $\boldsymbol{u}$ として単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ をとれば，すでに求めた $\boldsymbol{n} = \nabla\varphi / |\nabla\varphi|$ の関係を用いて

$$\boldsymbol{n} \cdot (\nabla \varphi) = \boldsymbol{n} \cdot |\nabla\varphi| \boldsymbol{n} = |\nabla\varphi| > 0$$

と方向微分係数が正になる．この結果は，勾配ベクトル $\nabla\varphi$ および単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の方向は，φ の値が増加する方向であることを示している．

例題5.3　$\varphi(x, y) = x^2 + 2y^2$ の，点 $(1, 1)$ における単位法線ベクトルを求めよ．

答　$\nabla\varphi = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} = 2x\boldsymbol{i} + 4y\boldsymbol{j}$ なので，点 $(1, 1)$ の勾配ベクトルは $2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$．したがって単位法線ベクトルは，$\boldsymbol{n} = \dfrac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|} = \dfrac{2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}}{\sqrt{2^2 + 4^2}}$

$$= \frac{\sqrt{5}}{5}\boldsymbol{i} + \frac{2\sqrt{5}}{5}\boldsymbol{j}.$$

■

5.3　スカラー場の勾配の基本法則

要点4

スカラー場の勾配に関する法則として，スカラー場 φ，ψ について，次の関係が成立する．

(a)　$\nabla(k\,\varphi + l\psi) = k\nabla\varphi + l\nabla\psi$，（$k$，$l$ はスカラー）

(b)　$\nabla(\varphi\psi) = (\nabla\varphi)\psi + \varphi(\nabla\psi)$

(c)　$\nabla\left(\dfrac{\varphi}{\psi}\right) = \dfrac{(\nabla\varphi)\psi - \varphi(\nabla\psi)}{\psi^2}$

(d)　$\nabla(f(\varphi)) = \dfrac{\mathrm{d}f(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi}\nabla\varphi$，（$f$ は**スカラー関数**）

これらの関係のいくつかについて，以下で証明を行う．

(a)　$\nabla(k\varphi + l\psi) = k\nabla\varphi + l\nabla\psi$ を証明する．

$$\nabla(k\varphi + l\psi) = \boldsymbol{i}\frac{\partial(k\varphi + l\psi)}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial(k\varphi + l\psi)}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial(k\varphi + l\psi)}{\partial z}$$

$$= \boldsymbol{i}\frac{\partial(k\varphi)}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial(k\varphi)}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial(k\varphi)}{\partial z} + \boldsymbol{i}\frac{\partial(l\psi)}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial(l\psi)}{\partial y}$$

$$+ \boldsymbol{k}\frac{\partial(l\psi)}{\partial z}$$

$$= k\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$

$$+ l\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = k\nabla\varphi + l\nabla\psi$$

証明終わり

なお，単位ベクトル $\boldsymbol{k}$ とスカラーk を混同しないこと．

(b)　$\nabla(\varphi\psi) = (\nabla\varphi)\psi + \varphi(\nabla\psi)$ を証明する．

$$\nabla(\varphi\psi) = \boldsymbol{i}\frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial y} + \frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

$$= \boldsymbol{i}\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \varphi\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \boldsymbol{j}\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \varphi\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)$$

$$+ \boldsymbol{k}\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \varphi\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)$$

$$= \psi\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) + \varphi\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)$$

$$= (\nabla\varphi)\psi + \varphi(\nabla\psi)$$

証明終わり

(d)　$\nabla(f(\varphi)) = \dfrac{\mathrm{d}f(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi}\nabla\varphi$を証明する．

$$\frac{\mathrm{d}f(\varphi)}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}f(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad \frac{\mathrm{d}f(\varphi)}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}f(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad \frac{\mathrm{d}f(\varphi)}{\partial z} = \frac{\mathrm{d}f(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

より，

$$\nabla(f(\varphi)) = \boldsymbol{i}\frac{\mathrm{d}f(\varphi)}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\mathrm{d}f(\varphi)}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\mathrm{d}f(\varphi)}{\partial z}$$

$$= \boldsymbol{i}\frac{\mathrm{d}f(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\mathrm{d}f(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\mathrm{d}f(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

$$= \frac{\mathrm{d}f(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi}\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = \frac{\mathrm{d}f(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi}\nabla\varphi$$

証明終わり

なお，ベクトルの勾配に関して，$\nabla\varphi = \mathbf{0}$ が常に成立する場合，φ は定数である．これは，スカラー値 φ が位置により変化しないことを意味する．また，ある点において $\nabla\varphi = \mathbf{0}$ の場合，零ベクトルは方向をもたないから，その点における法線がない，あるいは定義されないことを意味する．

例題 5.4　$\varphi(x, y) = 2x + y$，$\psi(x, y) = x - 2y$ のとき，$\nabla\left(\dfrac{\varphi}{\psi}\right)$ を求めよ．

答　$\nabla\left(\dfrac{\varphi}{\psi}\right) = \dfrac{(\nabla\varphi)\psi - \varphi(\nabla\psi)}{\psi^2}$ の関係を用いる．

$$\nabla\left(\frac{\varphi}{\psi}\right) = \frac{(2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j})(x - 2y) - (2x + y)(\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j})}{(x - 2y)^2} = \frac{5}{(x - 2y)^2}(-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}).$$

■

展開

問題 5.1　次の関数の $\nabla\varphi$ を求めよ．

(1)　$\varphi(x, y, z) = x^2z + 2y^3z^2$

(2)　$\varphi(x, y) = \sin x \cos^2 y$

問題 5.2　$\varphi(x, y) = \exp(x^2 + y^2)$ の勾配を，点 $(0, 0)$，点 $(1, 0)$，点 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ において求めよ．

問題 5.3　$\varphi(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + z$ における，点 $(2, 2, 4)$ を含む等位面を求めよ．

問題 5.4　$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$，$r = |\boldsymbol{r}|$ のとき，以下を $\boldsymbol{r}$ を用いて表せ．

(1)　∇r

(2)　$\nabla \log r$

確認事項 II

5 章　スカラー場の勾配

- □ スカラー場の勾配を求められる．
- □ 等位曲線，等位面を理解している．
- □ 勾配ベクトルと法線ベクトルの関係を理解している．
- □ スカラー場の勾配の基本法則を理解している．

6 章　ベクトル場の発散

- □ ベクトル場の発散を求められる．
- □ ベクトル場の発散の基本法則を理解している．
- □ ラプラス演算子の意味を理解している．

7 章　ベクトル場の回転

- □ ベクトル場の回転を求められる．
- □ ベクトル場の回転の基本法則を理解している．

8 章　ベクトル公式

- □ スカラー三重積，ベクトル三重積を理解している．
- □ 演算子を組み合わせた演算を理解している．
- □ スカラー場とベクトル場の組み合わせの演算を理解している．
- □ ベクトル場とベクトル場の組み合わせの演算を理解している．
- □ ポテンシャルを理解している．