演習問題の解答

演習 1.1　図 1a のよう.

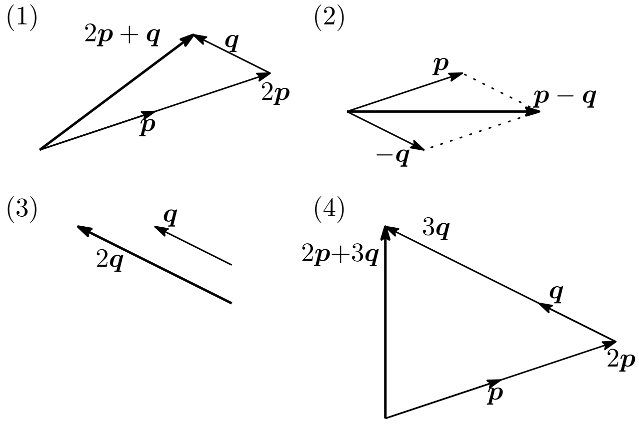

図 1a

演習 1.2　例えば, P_{21} は $\overrightarrow{\mathrm{OP}_{21}} = 2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ で表される点だから, $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を 2 倍にしたベクトル $2\boldsymbol{a}$ と, $\boldsymbol{b}$ を 1 倍 (そのまま) を加えてできるベクトルの始点を O においたときの終点の位置である.(図 1b)

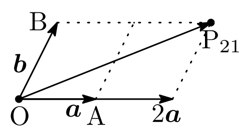

図 1b

$\boldsymbol{p} = s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$ の s, t をいろいろに変化させて, P_{st} を図示すると (矢線をそれぞれにかくとややこしくなるので省略) 図 1c のようになる.

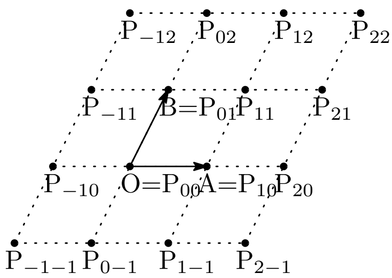

図 1c

係数が整数である点は図のように格子状にならぶ.

演習 1.3

(1)　$s=0$ なら, $\boldsymbol{p}=t\boldsymbol{b}$ となるから, $\boldsymbol{p}$ は $\boldsymbol{b}$ に平行なベクトル. したがって, $\mathrm{P}(\boldsymbol{p})$ は $\underline{\text{直線 OB}}$ を描く.

(2)　$t=0$ も同様に, $\mathrm{P}(\boldsymbol{p})$ は $\underline{\text{直線 OA}}$ を描く.

(3)　$s=1$ のとき, $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}$ である. $\boldsymbol{p}-\boldsymbol{a}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\boldsymbol{b}$ だから, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ が $\boldsymbol{b}$ に平行. すなわち $\mathrm{P}(\boldsymbol{p})$ は $\underline{\text{A を通り}, \boldsymbol{b} \text{ に平行な直線}}$ を描く.

(4)　$t=1$ も同様に, $\mathrm{P}(\boldsymbol{p})$ は $\underline{\text{B を通り}, \boldsymbol{a} \text{ に平行な直線}}$ を描く.

(5)　$s+t=1$ のとき, $s=1-t$ だから, $\boldsymbol{p}=(1-t)\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}$ となる. したがって, $\mathrm{P}(\boldsymbol{p})$ は直線 AB を描く.

(6)　$s=2$ のとき, $\boldsymbol{p}=2\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}$.

　$2\boldsymbol{a}$ で表される点 $\mathrm{A}'(2\boldsymbol{a})$ をとると,

$$\boldsymbol{p}=\overrightarrow{\mathrm{OA}'}+t\boldsymbol{b}.\ \text{つまり}\ \overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{P}}=t\boldsymbol{b}$$

となるので, P は A' を通り, $\boldsymbol{b}$ に平行な直線を描く.

これらを図示すると図 1d.

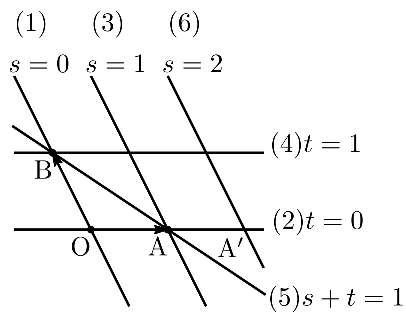

図 1d

演習 1.4　$\begin{pmatrix}1\\1\\k\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ となる $s,\ t,\ k$ を求めると,

$$\begin{cases}1=s+2t,\cdots【1】\\1=t,\cdots【2】\\k=s-t\cdots【3】\end{cases}\qquad【1】,【2】\text{ から } s=-1,\quad t=1\ 【3】\text{ から } \underline{k=-2}$$

演習 1.5

$$\boldsymbol{p}=s\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}\quad(s+t=1)$$

のとき,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}=&\boldsymbol{p}-\boldsymbol{a}=(s-1)\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}\\=&-t\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と平行だから, A, B, P は同一直線上にある. つまり, P は直線 AB 上にある.

逆に P が直線 AB 上にあるとき,

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

となる実数 t が存在する. よって,

$$\boldsymbol{p} - \boldsymbol{a} = t(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) \iff \boldsymbol{p} = (1-t)\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{a}$$

$s = 1 - t$ とおくと,

$$\boldsymbol{p} = s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} \quad (s + t = 1)$$

演習 1.6 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \times 1 + 2 \times 3 = \underline{7}$

演習 1.7 $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ から, 求めるベクトルは

$$5\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{5}{\sqrt{5}}\boldsymbol{a} = \underline{\sqrt{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

演習 1.8

(1) $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \underline{\sqrt{5}}$

(2) $|\boldsymbol{b}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \underline{\sqrt{10}}$

(3) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 1 \times 3 + 2 \times 1 = \underline{5}$

(4) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ とすると, $\cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \dfrac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角 $\theta = \underline{\dfrac{\pi}{4}}$

演習 1.9

(1) $|\boldsymbol{a}| = 2,\ |\boldsymbol{b}| = 2,\ \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ のなす角が $\dfrac{\pi}{3}$ だから,

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\frac{\pi}{3} = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = \underline{2}$$

(2) $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + 2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + |\boldsymbol{b}|^2 = 2^2 + 2 \times 2 + 2^2 = 12$

よって, $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| = \underline{2\sqrt{3}}$

(3) $|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4|\boldsymbol{b}|^2=2^2-4\times 2+4\times 2^2=12$

よって, $|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=\underline{2\sqrt{3}}$

(4) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2|\boldsymbol{b}|^2=2^2-2-2\times 2^2=-6$

$$\cos\theta=\frac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|}=\frac{-6}{2\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}}=\underline{-\frac{1}{2}}$$

よって, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ のなす角は $\dfrac{2}{3}\pi$

演習 1.10

$$|\boldsymbol{b}|=3 \quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 45^\circ=2\times 3\times\frac{1}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$$

よって, $\boldsymbol{a}$ の $\boldsymbol{b}$ への正射影ベクトルは

$$\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\boldsymbol{b}=\frac{3\sqrt{2}}{3^2}\boldsymbol{b}=\underline{\frac{\sqrt{2}}{3}\boldsymbol{b}}$$

演習 1.11 直線上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ に対して, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}$ で $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$ となるから,

$$1(x-1)+2(y-2)=x+2y-5=0$$

よって, 求める方程式は

$$\underline{x+2y=5}$$

演習 1.12 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ から

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\sqrt{1^2+2^2+2^2}=3 \quad |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+4^2}=3\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=1\times(-1)+2\times 1+2\times 4=9$$

$$\begin{aligned}\triangle\,\mathrm{OAB}&=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{3^2\times(3\sqrt{2})^2-9^2}=\underline{\frac{9}{2}}\end{aligned}$$

演習 1.13

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\times 2-3\times 1 \\ 3\times 1-1\times 2 \\ 1\times 1-2\times 1 \end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times3-2\times2\\2\times2-1\times3\\1\times2-1\times2\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}}$$

$$\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times3-3\times2\\3\times1-2\times3\\2\times2-2\times1\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix}}$$

演習 1.14　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}2-1\\3-2\\1-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$,

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}3-1\\1-2\\2-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}1\times(-1)-(-2)\times(-1)\\(-2)\times2-1\times(-1)\\1\times(-1)-1\times2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-3\\-3\end{pmatrix}=-3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

三角形 ABC の面積は $\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\dfrac{3}{2}\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\underline{\dfrac{3}{2}\sqrt{3}}$

平面 ABC に垂直なベクトルの 1 つは $\underline{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}$

演習 1.15　$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1,\ \ \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0,\ \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{j}$,
$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$
$\boldsymbol{a}=\alpha\boldsymbol{i}+\alpha\boldsymbol{j}+\beta\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{b}=\alpha\boldsymbol{i}-\alpha\boldsymbol{j}+\beta\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{c}=-\alpha\boldsymbol{i}-\alpha\boldsymbol{j}+\beta\boldsymbol{k}$,
$\boldsymbol{d}=-\alpha\boldsymbol{i}+\alpha\boldsymbol{j}+\beta\boldsymbol{k}$

(1)　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=(\alpha\boldsymbol{i}+\alpha\boldsymbol{j}+\beta\boldsymbol{k})\times(-\alpha\boldsymbol{i}-\alpha\boldsymbol{j}+\beta\boldsymbol{k})=\underline{2\alpha\beta\boldsymbol{i}-2\alpha\beta\boldsymbol{j}}$

(2)　$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}=(\alpha\boldsymbol{i}-\alpha\boldsymbol{j}+\beta\boldsymbol{k})\times(-\alpha\boldsymbol{i}+\alpha\boldsymbol{j}+\beta\boldsymbol{k})=\underline{-2\alpha\beta\boldsymbol{i}-2\alpha\beta\boldsymbol{j}}$

(3)　$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d})=(2\alpha\beta\boldsymbol{i}-2\alpha\beta\boldsymbol{j})\cdot(-2\alpha\beta\boldsymbol{i}-2\alpha\beta\boldsymbol{j})=\underline{0}$

(4)　$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d})=(2\alpha\beta\boldsymbol{i}-2\alpha\beta\boldsymbol{j})\times(-2\alpha\beta\boldsymbol{i}-2\alpha\beta\boldsymbol{j})=\underline{-8\alpha^2\beta^2\boldsymbol{k}}$

演習 1.16

(1)　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$ のスカラー 3 重積 (1 − 5 − 2) とみて,

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=\boldsymbol{c}\cdot\{\boldsymbol{d}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\}$$

ここで, $(1-5-3)$ を使うと,

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{c}\cdot\{(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}\} = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}) \blacksquare$$

(2)　$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}$ について $(1-5-3)$ を使うと,

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}) = \{(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})\cdot\boldsymbol{a}\}\boldsymbol{b}-\{(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})\cdot\boldsymbol{b}\}\boldsymbol{a}$$

ここで, $(1-5-2)$ を使うと,

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) = \{\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{a})\}\boldsymbol{b}-\{\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{b})\}\boldsymbol{a} \blacksquare$$

演習 1.17

四面体 ABCD の体積は, $\dfrac{1}{3}\triangle \mathrm{ABC}\cdot h$

ただし, h は D と平面 ABC の距離.

$\triangle \mathrm{ABC}= \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$　(図 1e)

よって,

$$\text{四面体 ABCD} = \frac{1}{6}|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}})|$$

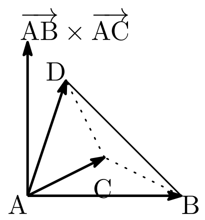

図 1e

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 1(-6)-2\cdot4 \\ 2\cdot2-(-3)(-6) \\ -3\cdot4-1\cdot2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ -14 \\ -14 \end{pmatrix} = -14\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}) = -14(2+2-1) = -42$$

よって,

$$\text{四面体 ABCD} = \frac{1}{6}\cdot 42 = \underline{7}$$

演習 2.1

$$2A+3B = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2+3 & 4+3 \\ -2+6 & 6+9 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 15 \end{pmatrix}}$$

$$A-2B=\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&2\\4&6\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1-2&2-2\\-1-4&3-6\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}-1&0\\-5&-3\end{pmatrix}}$$

演習 2.2

$$A=\frac{1}{2}\{(A+B)+(A-B)\}=\frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix}6&1\\-1&5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&1\\1&1\end{pmatrix}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&2\\0&6\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}}$$

$$B=(A+B)-A=\begin{pmatrix}6&1\\-1&5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}4&0\\-1&2\end{pmatrix}}$$

$$AB=\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&0\\-1&2\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}7&2\\-3&6\end{pmatrix}}$$

$$BA=\begin{pmatrix}4&0\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}8&4\\-2&5\end{pmatrix}}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&5\\0&9\end{pmatrix},$$

$$B^2=\begin{pmatrix}4&0\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&0\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16&0\\-6&4\end{pmatrix}$$

$$A^2-B^2=\begin{pmatrix}4&5\\0&9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}16&0\\-6&4\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}-12&5\\6&5\end{pmatrix}}$$

演習 2.3

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 1 + 2\times 3 & 1\times 1 + 2\times 2 \\ 3\times 1 + 4\times 3 & 3\times 1 + 4\times 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 15 & 11 \end{pmatrix}, \\
AC &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\times 2 + 2\times 1 & 1\times 3 + 2\times 2 \\ 3\times 2 + 4\times 1 & 3\times 3 + 4\times 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 10 & 17 \end{pmatrix}, \\
B + C &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 1+3 \\ 3+1 & 2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}, \\
A(B+C) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 3 + 2\times 4 & 1\times 4 + 2\times 4 \\ 3\times 3 + 4\times 4 & 3\times 4 + 4\times 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 25 & 28 \end{pmatrix}, \\
AB + AC &= \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 15 & 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 10 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7+4 & 5+7 \\ 15+10 & 11+17 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 25 & 28 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

たしかに, $A(B+C) = AB + AC$ である ∎

$$
\begin{aligned}
BC &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 2 + 1\times 1 & 1\times 3 + 1\times 2 \\ 3\times 2 + 2\times 1 & 3\times 3 + 2\times 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}, \\
A + B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 2+1 \\ 3+3 & 4+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}, \\
(A+B)C &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 2 + 3\times 1 & 2\times 3 + 3\times 2 \\ 6\times 2 + 6\times 1 & 6\times 3 + 6\times 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 18 & 30 \end{pmatrix}, \\
AC + BC &= \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 10 & 17 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+3 & 7+5 \\ 10+8 & 17+13 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 18 & 30 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

たしかに, $(A+B)C = AC + BC$ である ∎

演習 2.4 4 つの行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

はそれぞれ $1 \times 3,\ 2 \times 3,\ 3 \times 1,\ 3 \times 2$ 行列である.

$AB + CD$ を計算できるためには, AB と CD は同じ形の行列でなければならない.

A と C の行の次数, B と D の列の次数は同じでなければならないから, $AB + CD$ は 3×3 行列でなければならない.

また, A の列の次数と B の行の次数, C の列の次数と D の行の次数はそれぞれ等しくなければならない.

したがって,

$$\underline{A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}}$$

または,

$$\underline{A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}$$

AB と CD を交換しても $AB + CD$ は変らないから, いずれの場合も

$$\begin{aligned} AB+CD &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 10 & 0 \\ 15 & 22 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 8 & 12 & 3 \\ 17 & 26 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

演習 2.5 $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$ だから,
$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ となるのは $AB = BA$ のとき,

$$AB = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & b \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+2 & ab+1 \\ 4 & 2b+3 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & b \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+2b & -1+3b \\ 2a+2 & 5 \end{pmatrix}$$

$AB=BA$ から

$$\begin{cases} -a+2=-a+2b\cdots【1】, & ab+1=-1+3b\cdots【2】, \\ \quad 4=2a+2 \quad \cdots【3】, & 2b+3=5 \qquad\qquad \cdots【4】 \end{cases}$$

【3】,【4】から $a=1,\ b=1$ これらは【1】,【2】もみたす. よって,

$$\underline{a=1, \quad b=1}$$

演習 2.6 $(A-E)(A-2E)=\begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ b & 2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a-2 & 1 \\ b & 2-2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} (a-1)(a-2)+b & a-1 \\ b(a-2)+b & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(1, 2) 成分, (2, 2) 成分から $a=1, \quad b=0$ これらは他の成分もみたす. よって,

$$\underline{a=1, \quad b=0}$$

演習 2.7 f を表す行列を $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくと,

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+2b \\ c+2d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+3b \\ c+3d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+2b & a+3b \\ c+2d & c+3d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

から,

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}$$

演習 2.8 行列 A で表される一次変換によって, P, Q, R が移される点がそれぞれ P′, Q′, R′ だから,

$$A\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP'}}, \quad A\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}, \quad A\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR'}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \qquad \cdots【1】$$

だから,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR'}} &=A\overrightarrow{\mathrm{OR}}=A\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right)=A\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OP}}+A\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \\ &=\frac{1}{3}A\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\frac{2}{3}A\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OP'}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}\end{aligned}$$

よって,

$$\overrightarrow{\mathrm{OR'}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OP'}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}$$

これは, R′ が線分 P′Q′ を 2 : 1 に内分していることを表している ∎

(注)　R が線分 PQ を 2 : 1 に内分していることが 【1】 で表されることは次のようにして示される.

【1】 を変形すると, $3(\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})=2(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})$ つまり, $\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ となる.

図 2a から R が PQ を 2 : 1 に内分していることがわかる.

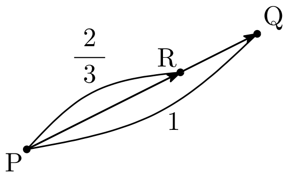

図 2a

演習 2.9

(1)　動点 R が三角形 OPQ の内部にあるとき,

直線 OR が辺 PQ と交わる点を K とする. R が三角形 OPQ の内部にあるから, $\overrightarrow{\mathrm{OK}}=k\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ とすると, $k>1$

また, K は PQ の内分点だから

$\overrightarrow{\mathrm{OK}}=(1-u)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+u\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ $(0<u<1)$

とかける. (図 2b)

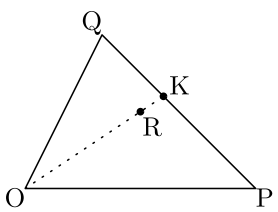

図 2b

また, $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=s\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ とかけるから,

$$\overrightarrow{\mathrm{OK}}=ks\overrightarrow{\mathrm{OP}}+kt\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-u)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+u\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}},\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は一次独立だから, $ks=1-u(>0),\ kt=u(>0)$

$k>0$ だから, $s=\dfrac{1-u}{k}>0,\quad t=\dfrac{u}{k}>0$

また, $ks+kt=(s+t)k=1$ で $k>1$ だから, $s+t=\dfrac{1}{k}<1$

以上から,

$$s>0,\ t>0,\ s+t<1.$$

逆に, $s>0,\ t>0,\ s+t<1$ のとき,

PQ を $t:s$ に内分する点を K とすると,

$$\overrightarrow{\mathrm{OK}}=\frac{s\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{s+t}\ \text{よって}\ \overrightarrow{\mathrm{OR}}=(s+t)\overrightarrow{\mathrm{OK}}$$

$s+t<1$ だから, R は OK の内分点. よって, R は $\angle$ POQ の内部にあって, PQ より O 側にある. すなわち, R は三角形 OPQ の内部の点である.

以上より R が三角形 OPQ の内部にあるための必要十分条件は

$$s>0, \quad t>0, \quad s+t<1 \blacksquare$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = s\overrightarrow{\mathrm{OP}} + t\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \quad (s>0,\ t>0,\ s+t<1)$ のとき,

$$A\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP'}}, \quad A\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ'}}, \quad A\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OR'}}$$

から,

$$\overrightarrow{\mathrm{OR'}} = A\overrightarrow{\mathrm{OR}} = A(s\overrightarrow{\mathrm{OP}} + t\overrightarrow{\mathrm{OQ}}) = sA\overrightarrow{\mathrm{OP}} + tA\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = s\overrightarrow{\mathrm{OP'}} + t\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}$$

$s,\ t$ の条件は変らないから,

$$\overrightarrow{\mathrm{OR'}} = s\overrightarrow{\mathrm{OP'}} + t\overrightarrow{\mathrm{OQ'}} \quad (s>0,\ t>0, \quad s+t<1)$$

よって, R$'$ は三角形 OP$'$Q$'$ の内部の点である $\blacksquare$

演習 2.10 座標平面上の任意の点 $(x,\ y)$ を y 軸へ正射影すると, $(0,\ y)$ (図 2c) この点の位置ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

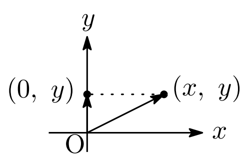

図 2c

と表されるから, y 軸への正射影を表す行列は $\underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$

演習 2.11　原点を中心の θ 回転を表す行列を A とすると,

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

y 軸についての対称移動を表す行列を B とすると,

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = A\overrightarrow{\mathrm{OP}}$,　$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = B\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ だから, $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = BA\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ よって, P を R に移す一次変換を表す行列は

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}$$

(注)　BA は x 軸を原点を中心に $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\theta}{2}$ だけ回転した直線
$x\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\theta}{2}\right) - y\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\theta}{2}\right) = 0$ についての対称移動を表す.

演習 2.12　$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$

(i)　$a^2 - 1 \neq 0$ すなわち, $a \neq \pm 1$ のとき, $A^{-1} = \dfrac{1}{a^2-1}\begin{pmatrix} a & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix}$ が存在する.

$$\begin{aligned} A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \frac{1}{a^2-1}\begin{pmatrix} a & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2-1}\begin{pmatrix} a-1 \\ a-1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a+1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって, (1, 1) に移される点は $\underline{\left(\dfrac{1}{a+1},\ \dfrac{1}{a+1}\right)}$

(ii)　$a = 1$ のとき, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

点 (1, 1) に移される点を $(x,\ y)$ とおくと,

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって, $x + y = 1$

(iii) $a=-1$ のとき, $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

点 (1, 1) に移される点を $(x,\ y)$ とおくと,

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -x+y \\ x-y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって, $-x+y=1,\ x-y=1$ これをみたす $(x,\ y)$ は存在しない.

よって, (1, 1) に移される点全体は

$$\underline{\begin{cases} 点 \left(\dfrac{1}{a+1},\ \dfrac{1}{a+1}\right) & (a\neq\pm1 \text{ のとき}), \\ 直線\ x+y=1 & (a=1 \text{ のとき}), \\ なし & (a=-1 \text{ のとき}), \end{cases}}$$

演習 3.1　与行列は $\begin{pmatrix} -3 & -9 & 3 \\ -5 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

(1) $\begin{pmatrix} -3 & -9 & 3 \\ -5 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{3}\times 1\,行} \underline{\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -5 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -5 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2\,行,3\,行の入れ替え} \underline{\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{3\,行+5\times 1\,行} \underline{\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 16 & -4 \end{pmatrix}}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 16 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{3\,行-4\times 2\,行} \underline{\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}}$

演習 3.2

(1) $\begin{cases} x+2y=2, \\ 3x+4y=0 \end{cases}$

$$
\begin{aligned}
&\text{拡大係数行列} && \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{III:2\text{行}-3\times 1\text{行}} && \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -6 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{I:-\frac{1}{2}\times 2\text{行}} && \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{III:1\text{行}-2\times 2\text{行}} && \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

よって,

$$\underline{\begin{cases} x=-4, \\ y=\ \ 3 \end{cases}}$$

(2) $\begin{cases} y-z=1, \\ x-2y+3z=0, \\ 3x-8y+6z=8 \end{cases}$

$$
\begin{aligned}
&\text{拡大係数行列} && \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & -8 & 6 & 8 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{II:1\text{行},2\text{行の入れ替え}} && \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -8 & 6 & 8 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{III:3\text{行}-3\times 1\text{行}} && \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 8 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{III:1\text{行}+2\times 2\text{行},\ 3\text{行}+2\times 2\text{行}} && \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 10 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{I:-\frac{1}{5}\times 3\text{行}} && \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{III:1\text{行}-3\text{行},\ 2\text{行}+3\text{行}} && \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

よって,

$$\begin{cases} x= \ \ 4, \\ y=-1, \\ z= -2 \end{cases}$$

(3) $\begin{cases} 2x+5y+4z= \ 1, \\ \ \ x+3y+2z= \ 0, \\ 3x+7y+ \ z=-3 \end{cases}$

$$\text{拡大係数行列} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{II:1\text{ 行},2\text{ 行の入れ替え}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{III:2\text{ 行}-2\times 1\text{ 行},\ 3\text{ 行}-3\times 1\text{ 行}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{I:-1\times 2\text{ 行},\ -1\times 3\text{ 行}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{III:1\text{ 行}-3\times 2\text{ 行},\ 3\text{ 行}-2\times 2\text{ 行}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{I:\frac{1}{5}\times 3\text{ 行}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{III:1\text{ 行}-2\times 3\text{ 行}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

よって,

$$\begin{cases} x= \ \ 1, \\ y=-1, \\ z= \ \ 1 \end{cases}$$

(4) $\begin{cases} x+2y+3z= 2, \\ -x-y+4z= 4, \\ 2x+5y+z=-2 \end{cases}$

$$
\text{拡大係数行列} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & -2 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{III:2\,\text{行}+1\,\text{行},\ 3\,\text{行}-2\times 1\,\text{行}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & -5 & -6 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{III:1\,\text{行}-2\times 2\,\text{行},\ 3\,\text{行}-2\,\text{行}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -11 & -10 \\ 0 & 1 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & -12 & -12 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{I:-\frac{1}{12}\times 3\,\text{行}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -11 & -10 \\ 0 & 1 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{III:1\,\text{行}+11\times 3\,\text{行},\ 2\,\text{行}-7\times 2\,\text{行}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)
$$

よって,

$$
\underline{\begin{cases} x= 1, \\ y=-1, \\ z= 1 \end{cases}}
$$

演習 3.3　順に行列をかけて示す.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & -9 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & -1 & 1 & 8 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -3 & -9 \\ 3 & -1 & 1 & 8 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -3 & -9 \\ 3 & -1 & 1 & 8 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -9 & -21 \\ 0 & -7 & -8 & -10 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -9 & -21 \\ 0 & -7 & -8 & -10 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & -7 & -8 & -10 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & -7 & -8 & -10 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 13 & 39 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{13} \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 13 & 39 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

まとめて書くと

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & -9 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & -1 & 1 & 8 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

演習 3.4

$$\begin{cases} y+2z=0, \\ x+\ y+\ z=0, \\ 3x+2y+\ z=0 \end{cases} \quad \text{係数行列は} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

第 1 行と第 2 行を入れ替える.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

第 1 行を -3 倍して第 3 行に加える.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

第 2 行を第 1 行から引き, 第 2 行を第 3 行に加える.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

これらから, $x - z = 0,\ y + 2z = 0$ z は任意で,

$$\begin{cases} x = \quad z \\ y = -2z \end{cases}$$

演習 3.5

(1) $\begin{cases} x+3y+2z = 0, \\ -x-\ y+4z = 4, \\ 2x+5y+\ z = -2 \end{cases}$

拡大係数行列は

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

第 1 行を第 2 行に加え, 第 1 行を -2 倍して第 3 行に加える.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & -2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \end{array}\right)$$

第 2 行を $\dfrac{1}{2}$ 倍し, 第 3 行を -1 倍する.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

第 2 行を -3 倍して第 1 行に加え, 第 2 行を第 3 行からひく.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

これから, $x - 7z = -6, \quad y + 3z = 2$. z は任意で,

$$\underline{\begin{cases} x = \ \ 7z - 6 \\ y = -3z + 2 \end{cases}}$$

(2) $\begin{cases} x+3y+2z = 2, \\ -x- \ y+4z = 4, \\ 2x+5y+ \ z = -2 \end{cases}$

拡大係数行列は

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

第 1 行を第 2 行に加え, 第 1 行を -2 倍して第 3 行に加える.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & -2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & -6 \end{array}\right)$$

第 2 行を $\dfrac{1}{2}$ 倍し, 第 3 行を -1 倍する.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & -6 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

第 2 行を第 3 行からひく.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

第 3 式が $0 = 3$ となり矛盾する. よって, <u>解なし</u>.

(3) $\begin{cases} x \qquad +3z = 2, \\ 2x+3y+4z = 8, \\ x+3y+ \ z = 6 \end{cases}$

拡大係数行列は

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

第 1 行を 2 倍して第 2 行に加え, 第 1 行を第 3 行からひく.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

第 2 行を第 3 行からひく.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

これから, $x + 3z = 2, \quad 3y - 2z = 4$. z は任意で,

$$\underline{\begin{cases} x = -3z + 2 \\ 3y = \ \ 2z + 4 \end{cases}}$$

(4) $\begin{cases} -2x - \ y \qquad = 1, \\ \ \ 2x + 3y + 4z = 4, \\ \ \ 6x + 7y + 8z = 5 \end{cases}$

拡大係数行列は

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \\ 6 & 7 & 8 & 5 \end{array}\right)$$

第 1 行を -1 倍する.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \\ 6 & 7 & 8 & 5 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \\ 6 & 7 & 8 & 5 \end{array}\right)$$

第 1 行を第 2 行からひき, 第 1 行を -3 倍して第 3 行からひく.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \\ 6 & 7 & 8 & 5 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 8 & 8 \end{array}\right)$$

第 3 行を $\dfrac{1}{2}$ 倍する.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 8 & 8 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \end{array}\right)$$

第 2 行を第 3 行からひく.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

第 3 式が $0 = -1$ となり矛盾する. よって, 解なし

(5) $\begin{cases} x+2y+5z+3w=-1, \\ 2x+3y+8z+4w=\ 0, \\ 3x+2y+7z+\ w=\ 1 \end{cases}$

拡大係数行列は

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 5 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 8 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 7 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

第 1 行を -2 倍して第 2 行に加え, 第 1 行を -3 倍して第 3 行からひく.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 5 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 8 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 7 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & -8 & -8 & 4 \end{array}\right)$$

第 2 行を -1 倍し, 第 3 行を $-\dfrac{1}{4}$ 倍する.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & -8 & -8 & 4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

第 2 行を第 3 行からひく.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

これから, 第 3 式が $0 = 1$ となり矛盾することがわかる.

よって, 解なし

(6) $\begin{cases} x+2y+5z+3w=-1, \\ 2x+3y+8z+4w=\ 0, \\ 3x+2y+7z+\ w=\ 5 \end{cases}$

拡大係数行列は

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 5 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 8 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 7 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

第 1 行を -2 倍して第 2 行に加え, 第 1 行を -3 倍して第 3 行からひく.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 5 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 8 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 7 & 1 & 5 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & -8 & -8 & 8 \end{array}\right)$$

第 2 行を -1 倍し, 第 3 行を $-\dfrac{1}{4}$ 倍する.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & -8 & -8 & 8 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

第 2 行を -2 倍して第 1 行に加え, 第 2 行を第 3 行からひく.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

これから, $x + z - w = 3,\ y + 2z + 2w = -2.\quad z,\ w$ は任意で,

$$\underline{\begin{cases} x = \ -z + w + 3, \\ y = -2z - 2w - 2 \end{cases}}$$

演習 3.6

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 階段行列ではあるが第 1 行の 0 でない先頭の数が 1 でない. 第 1 行を $\dfrac{1}{2}$ 倍すると条件をみたす.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 第 2 行の成分がすべて 0 で第 3 行には 0 でない成分がある. 第 2 行と第 3 行を入れ替えると条件をみたす.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 第 2 行の 0 でない先頭の数があるのは第 3 列でその第 1 行成分は 0 でない. また, 第 3 行の 0 でない先頭の数があるのは第 4 列でその第 1 行成分は 0 でない. 第 2 行を -2 倍し, 第 3 行を -1 倍して第 1 行に加えると条件をみたす.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 階段行列ではない. 行を入れ替えると条件をみたす. 第 2 行を第 1 行に, 第 3 行を第 2 行に, 第 1 行を第 3 行に移動すれば条件をみたす. 最初に第 1 行と第 2 行の入れ替えをし, 次に第 2 行と第 3 行を入れ替えれば実現される.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

演習 3.7

(1) 行基本変形によって, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{I} II \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$(階段行列) となるからランクは $\underline{1}$

(2) 行基本変形によって, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{I} II \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix}$
$\xrightarrow{I} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$(階段行列) となるからランクは $\underline{2}$

(3) 行基本変形によって, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{I} II \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & -4 & -8 \end{pmatrix}$
$\xrightarrow{I} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{I} I \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{I} II \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ (階段行列) となるからランクは $\underline{3}$

演習 3.8 拡大係数行列は $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ これを行基本変形する.

$$\xrightarrow{I\,II}\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&-2&-2&2\\0&-3&-3&3\end{pmatrix}\xrightarrow{I}\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&1&1&-1\\0&1&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{I\,II}\begin{pmatrix}1&0&-1&2\\0&1&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

元の形に戻すと, $\begin{cases} x\ -z= \ \ 2, \\ \ \ y+z=-1, \\ \ \ \ \ \ \ 0= \ \ 0 \end{cases}$ $z=t$ とおけば,

$$\underline{\begin{cases} x= \ \ t+2, \\ y=-t-1 \end{cases} \quad \text{自由度は } 1}$$

演習 3.9 $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$,
$D=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$

$$MN=\begin{pmatrix}A&B\\O&E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C&O\\D&E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}AC+BD&B\\D&E\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}AC+BD&=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

から,

$$\underline{MN=\left(\begin{array}{cc|cc}1&-1&1&1\\1&1&0&1\\\hline 1&-1&1&0\\0&1&0&1\end{array}\right)}$$

演習 3.10 行基本変形は略記する.

(1) $\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\0&1&0&1\end{array}\right)$ を行基本変形する.

$$\xrightarrow{I\,II}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&-2\\0&1&0&1\end{array}\right)$$

よって,

$$\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}^{-1}=\underline{\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}}$$

(2) $\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\3&4&0&1\end{array}\right)$ を行基本変形する.

$$\xrightarrow{I}II\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow{I}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{I}II\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right)\xrightarrow{I}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

よって,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \underline{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}$$

(3) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ を行基本変形する.

$$\xrightarrow{I}II\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow{I}II\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

よって,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \underline{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

(4) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ を行基本変形する.

$$\xrightarrow{I}II\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow{I}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{I}I\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)\xrightarrow{I}II\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{I}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}\right)\xrightarrow{I}II\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}\right)$$

よって,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \underline{\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}}$$

(5) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 9 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ を行基本変形する.

$$\xrightarrow{I}II \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{I} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{I}II \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -11 & -9 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{I}II \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -9 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

よって,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 9 & 8 \\ 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \underline{\begin{pmatrix} 2 & -9 & 11 \\ -2 & 6 & -7 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

演習 3.11 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に基本行列をかけて変形する.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

よって,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

したがって,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \underline{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

演習 3.12 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ に基本行列をかけて変形する.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって,

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}^{-1} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}
\end{aligned}$$

演習 4.1

(1) $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta - (-\sin^2\theta) = \underline{1}$

(2) $\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{vmatrix} = (-\cos^2\theta) - \sin^2\theta = \underline{-1}$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1^3 + 2^2 + 2^2 - 2^2 - 2^2 - 1^3 = \underline{0}$

(4) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2^3 + 1^3 + 1^3 - 2 - 2 - 2 = \underline{4}$

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1^3 + 2^3 + 3^3 - 1 \times 2 \times 3 - 2 \times 3 \times 1 - 3 \times 1 \times 2 = \underline{18}$

(6) $\begin{vmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -7 & 2 \end{vmatrix} = (-4)\times 1 \times 2 + 2 \times (-1) \times 3 + 3 \times 0 \times (-7)$

$-(-4)\times(-1)\times(-7) - 2\times 0 \times 2 - 3 \times 1 \times 3 = \underline{5}$

(7) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \\ 1 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 1\times 1 \times (-1) + 2 \times 7 \times 1 + 3 \times 2 \times 7$

$-1\times 7\times 7 - 2\times 2\times(-1) - 3\times 1\times 1 = \underline{7}$

(8) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 - abc - bca - cab = \underline{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}$

演習 4.2　行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の

(1, 4) 小行列式は $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \underline{0}$,　(1, 4) 余因子は $-0 = \underline{0}$,

(2, 2) 小行列式は $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \underline{1}$,　(2, 2) 余因子は $\underline{1}$,

(3, 2) 小行列式は $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \underline{2}$,　(3, 2) 余因子は $\underline{-2}$

演習 4.3

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=0\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= -(1\cdot 0\cdot 0 + 1\cdot 1\cdot 2 + 1\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot 0 - 1\cdot 0\cdot 2) \\
&\quad + (1\cdot 1\cdot 0 + 0\cdot 1\cdot 2 + 1\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot 1 - 0\cdot 1\cdot 0 - 1\cdot 1\cdot 2) \\
&\quad - 2(1\cdot 1\cdot 1 + 0\cdot 0\cdot 2 + 1\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot 0\cdot 1 - 0\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot 2) \\
&= \underline{-4}
\end{aligned}$$

演習 4.4　第 1 行の成分のうち 0 でないのは (1, 2) 成分だけだから, $(-1)^{1+2} = -1$ に注意して,

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

右辺の行列式の第 1 行の成分のうち 0 でないのは (1, 1) 成分と, (1, 2) 成分で, $(-1)^{1+1} = 1$, $(-1)^{1+2} = -1$ に注意して,

$$-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

サラスの方法によると, どちらの行列式も 0 だから, 与行列式の値は **0**.

(注)　(1, 2) 成分の余因子の第 2 行と第 4 行が一致する. このような行列式の値が 0 になることは 4.3 で学習する.

演習 4.5　平行六面体の頂点の A の座標が, (1, 2, 3), A に隣合う頂点の座標が B(2, 2, 4), C(3, 4, 4), D(3, 3, 4) だから

この平行六面体の辺を表すベクトルは

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 2-2 \\ 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 4-2 \\ 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 3-2 \\ 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって, この平行六面体の体積は

$$\left|\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right|$$

$$= |1\times2\times1+2\times1\times1+2\times0\times1-1\times1\times1-2\times0\times1-2\times2\times1|$$

$$= |-1| = \underline{1}$$

演習 4.6

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=(-5)-2(-9)+4-2\times7=3$$

$$|{}^tA| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(-5) - (-3) + 3 - 2(-1) = 3$$

よって, $|A| = |{}^tA|$ ∎

演習 4.7

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=(-3) - 3(-6) - 2 \times 3 - 2 \times 6 = -3$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$=5 - 2 \times 9 + (-4) - 2(-7) = -3$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=2(-9) - (-5) + (-4) - 2(-7) = -3$$

よって, $|A_1| = |A_2| = |A_3| = -|A| = -3$ ∎

(注)　A_1 は A の第 1 行と第 2 行を交換したもの, A_2 は A の第 2 行と第 4 行を交換したもの, A_3 は A の第 1 列と第 2 列を交換したものである.

演習 4.8　隣り合う 2 行間の交代性より,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} \blacksquare$$

演習 4.9

(1)　第 1 行展開する.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \times 5 - 2 \times 4 = \underline{7}$$

(2)　第 1 行展開する. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \underline{1}$

(3)　第 3 行展開し, 第 3 列展開する.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 9 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} = \underline{6}$$

(4)　第 3 行展開し, 第 2 列展開する.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 6 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \underline{4}$$

(5)　第 3 行展開する.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 2 + 1 \times 1 = \underline{5}$$

(6)　第 1 行展開する.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & d \\ e & 0 & f & 0 \\ 0 & g & 0 & h \end{vmatrix} &= a\begin{vmatrix} c & 0 & d \\ 0 & f & 0 \\ g & 0 & h \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} 0 & c & d \\ e & 0 & 0 \\ 0 & g & h \end{vmatrix} \\ &= af\begin{vmatrix} c & d \\ g & h \end{vmatrix} - be\begin{vmatrix} c & d \\ g & h \end{vmatrix} = \underline{(af - be)(ch - dg)} \end{aligned}$$

(注)　最初に第 2 行と第 3 行, 第 2 列と第 3 列を交換すると,

$$\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & d \\ e & 0 & f & 0 \\ 0 & g & 0 & h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ e & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & g & h \end{vmatrix}$$

となり, あとで学習するブロック行列式の形になる.

(7)　第 1 行展開する.

$$\begin{vmatrix} a & 0 & e & 0 \\ 0 & c & f & 0 \\ b & 0 & 0 & g \\ 0 & d & 0 & h \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} c & f & 0 \\ 0 & 0 & g \\ d & 0 & h \end{vmatrix} + e\begin{vmatrix} 0 & c & 0 \\ b & 0 & g \\ 0 & d & h \end{vmatrix}$$

$$= -ag\begin{vmatrix} c & f \\ d & 0 \end{vmatrix} - ec\begin{vmatrix} b & g \\ 0 & h \end{vmatrix} = \underline{adfg - bceh}$$

(8)　第 1 行展開する.

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ b & a & b & 0 \\ 0 & b & a & b \\ 0 & 0 & b & a \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} b & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & b & a \end{vmatrix}$$

$$= a^2\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} - ab\begin{vmatrix} b & b \\ 0 & a \end{vmatrix} - b^2\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}$$

$$= a^2(a^2 - b^2) - a^2b^2 - b^2(a^2 - b^2) = \underline{a^4 - 3a^3b^3 + b^4}$$

演習 4.10

第 4 行展開

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2 - 2 + 2 \times 1 = 2$$

第 2 列展開

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\
=& -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \\
=& -4 - 2(-2) + 2 = 2
\end{aligned}
$$

第 3 列展開

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\
=&2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \\
=&2 \times 6 - 4 + 2(-2) - 2 = 2
\end{aligned}
$$

よって, これらの結果は一致する ∎

演習 4.11

(1)　第 2 行はすべて 2 の倍数, 第 3 行はすべて 3 の倍数, 第 2 列はすべて負の整数, 第 4 列はすべて 4 の倍数だから,

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 8 \\ 3 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= -24\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -24 \times (-1) = \underline{24}
\end{aligned}
$$

(2) $\begin{vmatrix} 2a+b & -2b & 2a+3b \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a+b & 0-2b & 2a+3b \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ とみて,

$$
\begin{aligned}
&= a\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2a\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= -2a(-2) - b(-2) = \underline{4a+2b}
\end{aligned}
$$

演習 4.12

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

第 1 行と第 3 行が同じだからこの行列式は $\underline{0}$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$ 行基本変形 III により,

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} = \underline{2}$$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ 行基本変形 III により,

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \underline{16}$$

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ 行基本変形 III により,

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & -10 & -13 \\ -2 & -8 & -10 \\ -1 & -2 & -7 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 7 & 10 & 13 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 0 & -4 & -36 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -4 & -36 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 16 \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \underline{-160}$$

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ 行基本変形 III により,

$$
= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}
$$

$$
= - \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & -8 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -8 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = \underline{-10}
$$

演習 4.13

(1) $\left| \begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 10 & 9 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right|$ とみて,

$$
\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 10 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times (-3) = \underline{-3}
$$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

この行列は三角行列だから, その行列式は対角成分の積 $1^5 = \underline{1}$

(3) $\left| \begin{array}{cc|c|cc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right|$ とみて,

$$
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \times 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \underline{0}
$$

(4) $\left| \begin{array}{cc|c|cc} 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right|$ とみて

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \times 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \times 2 \times 3 = \underline{18}$$

(5) $\left|\begin{array}{cc|ccc} 2 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right|$ とみて

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times 6 = \underline{18}$$

演習 4.14

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 8 & 10 & 9 \\ 7 & 7 & 8 & 7 \\ 9 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \underline{-1}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \underline{-3}$$

また,

$$|AB| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 8 & 10 & 9 \\ 7 & 7 & 8 & 7 \\ 9 & 7 & 9 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 7 & 7 & 8 & 7 \\ 9 & 7 & 9 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -7 \\ 2 & 0 & -5 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & -7 \\ 2 & -5 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -7 \\ 2 & -3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & -7 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = 3$$

たしかに, $|AB| = |A||B| = 3$ になっている ∎

演習 4.15

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の余因子行列は

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 4 & 3 & 8 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ の余因子行列は

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -27 & 40 & -11 \\ 12 & -38 & 28 \\ 9 & 4 & -5 \end{pmatrix}}$$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の余因子行列は

$$\begin{pmatrix}
\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \\
-\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\
-\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}
\end{pmatrix}$$

$$= \underline{\begin{pmatrix} 7 & -2 & -6 & 5 \\ -6 & 4 & 4 & -2 \\ -2 & 4 & 4 & -6 \\ 5 & -6 & -2 & 7 \end{pmatrix}}$$

演習 4.16

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ だからこの行列は逆行列をもつ．その逆行列は

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\underline{= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 36 + 20 - 8 - 6 - 45 = 0$ だから，この行列は<u>逆行列をもたない</u>

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 12 + 16 - 12 - 10 - 24 = -3$ だからこの行列は逆行列をもつ．その逆行列は

$$\frac{1}{-3} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\underline{= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

演習 4.17　係数行列の行列式は $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5$

第 1 列を右辺で置き換えた行列式は $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 10$

第 2 列を右辺で置き換えた行列式は $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 5$

第 3 列を右辺で置き換えた行列式は $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -5$

よって,

$$x = \frac{10}{5} = 2, \quad y = \frac{5}{5} = 1, \quad z = \frac{-5}{5} = -1$$

$$\underline{x = 2, \quad y = 1, \quad z = -1}$$

演習 5.1

$$s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} + u\boldsymbol{c} + v\boldsymbol{d} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \text{ と}$$

おくと,

$$\begin{cases} s+2t+3u+3v=0, \\ 2s+3t+4u+3v=0, \\ 2s+4t+4u+2v=0, \\ s+\ t+3u+4v=0 \end{cases}$$

これを解くと, $s = v,\ t = v,\ u = -2v$ したがって, $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$ となり, $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{d}$ は $\underline{\text{一次従属}}$ である.

また, $s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} + u\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ とすると, 上の連立方程式で, $v = 0$ とした場合と同じであり, $s = t = u = 0$ となるから, $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ は一次独立である.

したがって, 一次独立となる最大個数は $\underline{3}$ 個である.

(注)　$\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{d}\}$, $\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{d}\}$, $\{\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{d}\}$ もそれぞれ一次独立である.

演習 5.2

(1)　$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ とおく.

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -3 \\ -1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = (\lambda - 1)(\lambda - 5) = 0$$

よって, 行列 A の固有値は $\underline{1,\ 5}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ とおく.

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

よって, 行列 A の固有値は $\underline{2,\ 3}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおく.

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$$

よって, 行列 A の固有値は $\underline{2}$

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ とおく.

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & 1 \\ 2 & \lambda - 1 & 2 \\ -2 & -1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

よって, 行列 A の固有値は $\underline{1,\ 2,\ 3}$

(5) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ とおく.

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)^2 = 0$$

よって, 行列 A の固有値は $\underline{1,\ 3}$

(6) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ とおく.

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2$$

$$= (\lambda - 1)^2(\lambda - 2) = 0$$

よって, 行列 A の固有値は $\underline{1,\ 2}$

演習 5.3 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & -2 \\ 1 & \lambda & -2 \\ 1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$
$$= \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = (\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1) = 0$$

から, 固有値は $\underline{2,\ 1,\ -1}$

(i) $\lambda = 2$ のとき, 固有ベクトルを $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおくと,

$$(A-2E)\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x-2y+2z \\ -x-2y+2z \\ -x+y-z \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

から, $-x-2y+2z = -x+y-z = 0$ よって, $x = 0,\ y = z$. $y = t$ とおくと, $z = t$ よって, 固有値 2 に対する固有ベクトルは $\underline{\boldsymbol{v} = t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\ (t \text{ は } 0 \text{ でない数})}$

(ii) $\lambda = 1$ のとき, 固有ベクトルを $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおくと,

$$(A-E)\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y+2z \\ 2x-y-z \\ -x+y \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

から, $x = y = z$. $x = t$ とおくと, $y = z = t$ よって, 固有値 1 に対する固有ベクトルは $\underline{\boldsymbol{v} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\ (t \text{ は } 0 \text{ でない数})}$

(iii) $\lambda = -1$ のとき, 固有ベクトルを $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおくと,

$$(A+E)\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-2y+2z \\ -x+y+2z \\ -x+y+2z \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

から, $x = y,\ z = 0$. $x = t$ とおくと, $y = t$ よって, 固有値 -1 に対する固有ベクトルは $\underline{\boldsymbol{v} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ (t \text{ は } 0 \text{ でない数})}$

演習 5.4　$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -2 & 1 \\ 1 & \lambda-3 & 1 \\ 1 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda-1)^3 = 0$$

から, 固有値は $\underline{1}$

$\lambda = 1$ から, 固有ベクトルを $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおくと,

$$(A - E)\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+2y-z \\ -x+2y-z \\ -x+2y-z \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

から, $x - 2y + z = 0$ よって, $x = s,\ y = t$ とおくと, $z = -s + 2t$

よって, 固有値は 1 で固有ベクトルは

$$\underline{\boldsymbol{v} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (s,\ t \text{ は } 0 \text{ でない数})}$$

演習 5.5

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ の固有方程式は

$$\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 \\ -3 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = (\lambda-5)(\lambda-1) = 0$$

固有値は 5, 1

それぞれに対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ とすると,

$$P^{-1}AP = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

演習 5.6 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = D$ とおくと,

$$
\begin{aligned}
A^n =& (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1} \\
=& \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\left\{\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\right\} \\
=& \underline{\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5^n+3 & 5^n-1 \\ 3\cdot 5^n-3 & 3\cdot 5^n+1 \end{pmatrix}}
\end{aligned}
$$

演習 5.7

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ の固有方程式は $\begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 \\ -1 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$

固有値は 3 その固有ベクトルは $t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (t は 0 でない数)

$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とおき, $(A-3E)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$ とすると,

$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ -1-x \end{pmatrix}$ (x は任意). $x = 0$ として,

$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ とし, $P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v} & \boldsymbol{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ とおくと,

$$
P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}
$$

(2) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ の固有方程式は

$$
\begin{vmatrix} \lambda-4 & 0 & -1 \\ -2 & \lambda-3 & -2 \\ 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = (\lambda-2)^2(\lambda-3) = 0
$$

固有値は 2, 3

その固有ベクトルは $t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $s\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ ($s,\ t$ は 0 でない数)

$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ とおき, $(A-2E)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}_1$ とすると,

$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ -2x+1 \end{pmatrix}$ (x は任意). $x = 0$ として,

$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とし, $P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ とおくと,

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \underline{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

章末問題の解答

1.1

(1) $4\boldsymbol{a} = -5\boldsymbol{b} - 6\boldsymbol{c}, \quad |\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{c}| = 1$ から,

$$|4\boldsymbol{a}|^2 = |-5\boldsymbol{b} - 6\boldsymbol{c}|^2, \quad 16|\boldsymbol{a}|^2 = 25|\boldsymbol{b}|^2 + 60\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} + 36|\boldsymbol{c}|^2$$

$$16 = 25 + 60\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} + 36$$

よって, $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} = \underline{-\dfrac{3}{4}}$

(2) $|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}|^2 = |\boldsymbol{b}|^2 - 2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} + |\boldsymbol{c}|^2 = 1 - 2\left(-\dfrac{3}{4}\right) + 1 = \dfrac{7}{2}$

よって,

$$|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}| = \sqrt{\frac{7}{2}} = \underline{\frac{\sqrt{14}}{2}}$$

(3) $\boldsymbol{a} = -\dfrac{5}{4}\boldsymbol{b} - \dfrac{3}{2}\boldsymbol{c}$ から,

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}|^2 &= \left|-\frac{1}{4}\boldsymbol{b} - \frac{1}{2}\boldsymbol{c}\right|^2 = \frac{|\boldsymbol{b}|^2}{16} + \frac{1}{4}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} + \frac{|\boldsymbol{c}|^2}{4} \\ &= \frac{1}{16} - \frac{3}{16} + \frac{1}{4} = \frac{1}{8}\end{aligned}$$

よって,

$$|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}| = \underline{\frac{\sqrt{2}}{4}}$$

1.2

$$|\boldsymbol{p}|^2 = |\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{b}|^2 t^2 + 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}t + |\boldsymbol{a}|^2$$

$|\boldsymbol{b}|,\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b},\ |\boldsymbol{a}|$ は定数だから, この式は t の 2 次関数.

$$|\boldsymbol{p}|^2 = |\boldsymbol{b}|^2\left(t + \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\right)^2 - \frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}{|\boldsymbol{b}|^2} + |\boldsymbol{a}|$$

$|\boldsymbol{p}|$ が最小になるのは $|\boldsymbol{p}|^2$ が最小になるときで,

$$\underline{t = -\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}}$$

のとき.

【図形的解答】

$\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{a}$ を位置ベクトルとみて, それぞれに対応する点を $\mathrm{P}(\boldsymbol{p})$, $\mathrm{A}(\boldsymbol{a})$ とすると, $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$ は点 P が点 A を通り $\boldsymbol{b}$ に平行な直線 l を描くことを意味する. (図 1f)

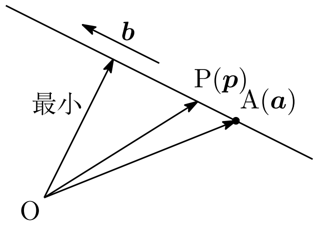

図 1f

$|\boldsymbol{p}|$ は原点 O から点 P までの距離を表す. これが最小になるのは, OP が l に垂直なとき, すなわち, $\boldsymbol{p} \perp \boldsymbol{b}$ のとき,

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b} = 0$$

から,

$$\underline{t = -\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}}$$

1.3 直線 $l: ax + by + c = 0$ の法線ベクトルは $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ とおける.

P から l へ下した垂線の足を H とすると, 点 P と直線 l の距離は $|\overrightarrow{\mathrm{PH}}|$

このとき, $\overrightarrow{\mathrm{PH}} /\!/ \boldsymbol{n}$ だから, 内積の絶対値 $|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PH}}| = |\boldsymbol{n}||\overrightarrow{\mathrm{PH}}|$

ここで, H の座標を $(x_1,\ y_1)$ とおくと,

$$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PH}} = a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) = (ax_1 + by_1) - (ax_0 + by_0)$$

また, H は l 上の点だから $ax_1 + by_1 + c = 0$ よって,

$$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PH}} = -c - (ax_0 + by_0) = -(ax_0 + by_0 + c)$$

よって, 直線 l の距離は

$$|\overrightarrow{\mathrm{PH}}| = \frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PH}}|}{|\boldsymbol{n}|} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$ (証明終り)

1.4 2 平面のなす角はその法線ベクトルのなす角と等しい. (図 1g) 法線ベクトルのなす角が鈍角のときはその補角をとればよい.

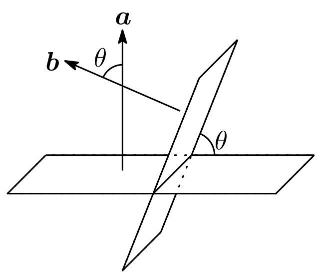

図 1g

平面 $x - y - 3z + 2 = 0$ の法線ベクトルを $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, 平面 $x + y - z = 0$

の法線ベクトルを $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とすると,

$$\cos\theta = \frac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{|1-1+3|}{\sqrt{1^2+1^2+3^2}\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{33}} = \underline{\frac{\sqrt{33}}{11}}$$

1.5　2 直線に平行なベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ とすると,

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2 直線のなす角 θ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角またはその補角.

$$|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14},$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 1\times(-2) + 2\times 3 + 3\times 1 = 7$$

$$\cos\theta = \frac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

よって, 2 直線のなす角 $\theta = \underline{\dfrac{\pi}{3}}$

1.6　$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 2-0 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 3-0 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 - 1\cdot 3 \\ 1\cdot 1 - (-1)\cdot 1 \\ -1\cdot 3 - 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{n}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ に垂直だから, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ に平行. $\boldsymbol{n} = k\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおくと, 第 1 成分から, $k = -1$ よって,

$$\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

よって,

$$\underline{p = -2,\ q = 5}$$

1.7　$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x}$ の始点をそろえて考える. $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x}$ だから, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{x}$ の終点は $\boldsymbol{b}$ に垂直な平面上にある. $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{x}$ のなす角を θ ($\boldsymbol{b}$ の向きに右ねじが進む方向に, $\boldsymbol{a}$ から測った角) とする. (図 1h)

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=c$ から, $|\boldsymbol{x}|\cos\theta=\dfrac{c}{|\boldsymbol{a}|}$ だから, $\boldsymbol{x}$ の終点は $\boldsymbol{a}$ の方向に $\dfrac{c}{|\boldsymbol{a}|}$ だけとった点 ($c<0$ のときは $\boldsymbol{a}$ と反対向きに $\dfrac{|c|}{|\boldsymbol{a}|}$ の意味) を通り, $\boldsymbol{a}$ に垂直な直線上にある.

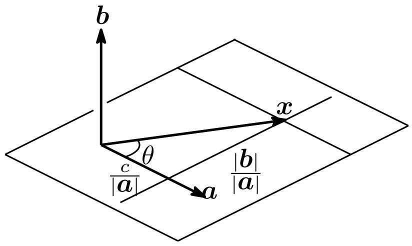

図 1h

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ から, $|\boldsymbol{x}|\sin\theta=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$ だから, $\boldsymbol{x}$ の終点は $\boldsymbol{a}$ に平行で, 始点を通る直線と $\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}$ の距離にある直線 ($\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ を軸に左回りした側) 上にある.

したがって, $\boldsymbol{x}$ の終点の位置は 1 通りに定まる ■

【計算による別証】

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{a}-|\boldsymbol{a}|^2\boldsymbol{x}=c\boldsymbol{a}-|\boldsymbol{a}|^2\boldsymbol{x}$$

$|\boldsymbol{a}|\neq 0$ より,

$$\boldsymbol{x}=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|^2}(c\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$$

確かに 1 通りに定まる ■

2.1 与式を移項して整理して, $(2A-C)X=-2B+3D$

$$2A-C=2\begin{pmatrix}2&1\\-2&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&1\\-2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\-2&0\end{pmatrix}$$

$$-2B+3D=-2\begin{pmatrix}1&2\\-1&-3\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1&2\\2&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\8&-3\end{pmatrix}$$

よって,

$$\begin{pmatrix}1&1\\-2&0\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&2\\8&-3\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}X&=\begin{pmatrix}1&1\\-2&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&2\\8&-3\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-1\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\8&-3\end{pmatrix}\\&=\underline{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-8&3\\10&1\end{pmatrix}}\end{aligned}$$

2.2

(1) $A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=(A-aE)(A-dE)-bcE$

$$\begin{aligned}(A-aE)(A-dE)&=\begin{pmatrix}0&b\\c&d-a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a-d&b\\c&0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}bc&0\\0&bc\end{pmatrix}=bcE\end{aligned}$$

よって, $A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$ ■

(2)　$ad-bc=0$ のとき, (1) より $A^2=(a+d)A$

$$A^3=A^2A=(a+d)A^2=(a+d)^2A,\ A^4=(a+d)^3A,\ \cdots$$

$A^n=(a+d)^{n-1}A$ とすると,

$$A^{n+1}=A^nA=(a+d)^{n-1}A^2=(a+d)^nA$$

数学的帰納法により

$$\underline{A^n=(a+d)^{n-1}A}$$

2.3

(1)　点 A は点 B に, 点 B は点 A に移されるから,

$$f(\overrightarrow{\mathrm{OA}})=\overrightarrow{\mathrm{OB}},\quad f(\overrightarrow{\mathrm{OB}})=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

直線 AB 上の点を P, f による点 P の像を P$'$ とすると,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\quad \overrightarrow{\mathrm{OP'}}=(1-t)f(\overrightarrow{\mathrm{OA}})+tf(\overrightarrow{\mathrm{OB}})=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

よって, P$'$ は直線 BA 上をくまなく動く. よって, 直線 AB は直線 AB すなわち自分自身に移される ■

(2)　(1) で P$'$=P とおくと,

$$(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OA}}\quad (1-2t)(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})=0$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\neq\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ だから, $t=\dfrac{1}{2}$ よって,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})=\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$

よって, 自分自身に移される点は線分 AB の中点 M のみである ■

2.4　原点 O は一次変換によって O 自身に移される. 求めるベクトルは l に平行であり, 移動後も l に平行なベクトルである.

$$\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}//A\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2m\\4+3m\end{pmatrix}$$

よって, $1:m=1+2m:4+3m\quad m(1+2m)=4+3m$

$m^2-m-2=0\quad (m+1)(m-2)=0$

よって, $\underline{m=-1,\ 2}$

(注)　この f は $y=-x,\ y=2x$ をそれ自身に移す．このとき，

$$A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

このように，$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$) のとき，$\boldsymbol{x}$ を固有ベクトルといい，λ を固有値という．固有値，固有ベクトルについては第 5 章で解説する．

2.5

(1)　直線 $y=x$ の上の任意の点 $(t,\ t)$ の像を $(x',\ y')$ とする．

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} = 3t\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

よって，$x'=3t,\ y'=9t$ で $y'=3x'$ は任意の値をとるから，点 $(x',\ y')$ は原点を通り $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ に平行な直線 $y=3x$ 上をくまなく動く．

よって，直線 $y=x$ の像は <u>直線 $y=3x$</u>

(2)　直線 $x+2y=0$ の上の任意の点 $(2t,\ -t)$ の像を $(x',\ y')$ とする．

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2t \\ -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x'=y'=0$ これは任意 t に対して成り立つから，点 $(x',\ y')$ は原点.

よって，直線 $2x+y=0$ の像は <u>原点</u>

(3)　xy 平面上の任意の点 $(x,\ y)$ の像を $(x',\ y')$ とする．

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ 3x+6y \end{pmatrix} = (x+2y)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

よって，$3x'=y'=3(x+2y)$ $x,\ y$ は任意の値をとるから，$x+2y$ はすべての値をとる．

よって，点 $(x',\ y')$ は原点を通り $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ に平行な直線 $y=3x$ 上をくまなく動く．

よって，xy 平面全体の像は <u>直線 $y=3x$</u>

(4)　円 $x^2+y^2=1$ 上の任意の点の座標は $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ とかける. その像を $(x',\ y')$ とする.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta + 2\sin\theta \\ 3\cos\theta + 6\sin\theta \end{pmatrix}$$
$$=(\cos\theta + 2\sin\theta)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

よって, $x' = \dfrac{1}{3}y' = \cos\theta + 2\sin\theta$

三角関数を合成して,

$$\cos\theta + 2\sin\theta = \sqrt{5}\sin(\theta+\alpha)$$

ただし, α は

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

をみたす角.

よって, $-\sqrt{5} \leqq x' \leqq \sqrt{5}$

よって, 円 $x^2+y^2=1$ の像は $\underline{\text{線分 } y=3x\ (-\sqrt{5} \leqq x \leqq \sqrt{5})}$

3.1　未知数が n 個の m 式からなる連立 1 次方程式の係数行列は $m \times n$ 行列である. $n < m$ のとき, 係数行列は縦長である.

第 1 列から前進消去をして階段行列を作ることができる. 階段行列では, 行が下に行くにしたがって左側の 0 の個数が少なくとも 1 個増える. 第 1 行の左側には 0 がない可能性ははあるが, 第 2 行には少なくとも 1 個, 第 3 行には少なくとも 2 個, $\cdots$, 第 n 行には少なくとも $n-1$ 個, 第 $n+1$ 行には少なくとも n 個左側に 0 が並ぶ.

列の個数は n であるから, 第 $n+1$ 行以下の行はすべての成分は 0 でなければならない ∎

3.2

(1)　係数行列は $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & a & 4 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$　これを行基本変形する.

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -4+a & -6 \\ 0 & -4 & -8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & -4+a & -6 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4+a & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2-2a \end{pmatrix}$$

$2-2a \neq 0$ つまり $a \neq 1$ とすると, 係数行列のランクが 3 となり, 未知数の個数と一致するので, 自明な解しかもたない.

$\underline{a=1}$ のとき係数行列のランクは 2 になり未知数の個数より少ないから, 自明でない解をもつ. (解は $x=t,\ y=-2t,\ z=-t,\ t$ は任意定数)

(2)　拡大係数行列は $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 4 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & -9 & a \end{array}\right)$ 行基本変形により,

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -5 & -7 & 11 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 8 & 7 \\ 0 & -5 & -3 & -1 & a-4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 5 & 7 & -11 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 8 & 7 \\ 0 & 5 & 3 & 1 & 4-a \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 8 & 7 \\ 0 & 5 & 7 & -11 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 1 & 4-a \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 17 & -51 & -34 \\ 0 & 0 & 13 & -39 & -31-a \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 13 & -39 & -31-a \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5-a \end{array}\right)$$

$-5-a \neq 0$ すなわち $a \neq -5$ のとき, 第 4 行から解なし. したがって解が存在する条件は $\underline{a=-5}$

またこのとき係数行列のランクは 3 で未知数の個数は 4 だから解の自由度は $4-3=\underline{1}$

(解は $x=t+2,\ y=2t+3,\ z=-3t-2,\ w=-t,$ t は任意定数)

3.3　拡大行列を作り, 行基本変形して,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\rightarrow}{I}I \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\rightarrow}{I} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\rightarrow}{I}II \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\rightarrow}{I} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \underset{\rightarrow}{I}II \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underrightarrow{I}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \underrightarrow{I}II \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

よって, $A^{-1} = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}$

また,

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

確かに単位行列になっている ∎

3.4

(1)　係数行列は $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 拡大係数行列を作り, 行基本変形して,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underrightarrow{I}II \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underrightarrow{I}II \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \underrightarrow{I}II \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 4 \end{array}\right)$$

$$\underrightarrow{I}II \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 4 \end{array}\right)$$

よって, 逆行列は $\underline{\begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ -2 & -2 & 3 \\ -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}}$

(2)　これを使うと, 方程式 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ の解は,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ -2 & -2 & 3 \\ -2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{x = 2, \quad y = -1, \quad z = 1}$$

3.5　単位行列を求めるのと同様な方法を用いる．$AX = B$ に対して $(A|B)$ を行基本変形をして, $(E|B')$ になるようにする．基本行列を順次かけたものを M とすれば $M(A|B) = (MA|MB) = (E|B')$

$MA = E,\ AX = B$ だから $MAX = EX = MB = B'$

A が E になるように変形結果の B' が X である．

($M = A^{-1}$ である．A を E に行基本変形することは A^{-1} を左からかけることに他ならない.)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 5 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 9 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{I} II \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 5 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -6 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{I} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 5 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 6 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{I} II \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{I} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{I} II \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

よって, $\underline{X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}}$

4.1

(1)　$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 \\ 2 & 1 & x \end{vmatrix} = x^3 + 4 - 6x = (x-2)(x^2 + 2x - 2) = 0$ から

$$x = \underline{2,\ -1 \pm \sqrt{3}}$$

$$
\begin{vmatrix} x+2 & 1 & 1 \\ 1 & x+2 & 1 \\ -1 & 1 & x+2 \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
=&(x+2)^3 - 1 + 1 - (x+2) + (x+2) - (x+2) \\
=&(x+1)(x+2)(x+3) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\underline{x = -1,\ -2,\ -3}
$$

4.2 行基本変形により,

$$
\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & -2 & -6 & -8 \\ 0 & 3 & -2 & -7 & -12 \end{vmatrix}
$$

$$
= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 & -4 \\ 2 & -2 & -6 & -8 \\ 3 & -2 & -7 & -12 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -6 & -2 \\ 3 & 1 & -7 & -3 \end{vmatrix}
$$

$$
=8 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 16 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = \underline{32}
$$

4.3

$$
A_4 = \begin{vmatrix} 2x & x+1 & 0 & 0 \\ x-1 & 2x & x+1 & 0 \\ 0 & x-1 & 2x & x+1 \\ 0 & 0 & x-1 & 2x \end{vmatrix},
$$

$$
A_3 = \begin{vmatrix} 2x & x+1 & 0 \\ x-1 & 2x & x+1 \\ 0 & x-1 & 2x \end{vmatrix}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} 2x & x+1 \\ x-1 & 2x \end{vmatrix}
$$
とする.

$$
\begin{aligned}
A_4 =& 2x \begin{vmatrix} 2x & x+1 & 0 \\ x-1 & 2x & x+1 \\ 0 & x-1 & 2x \end{vmatrix} - (x+1) \begin{vmatrix} x-1 & x+1 & 0 \\ 0 & 2x & x+1 \\ 0 & x-1 & 2x \end{vmatrix} \\
=& 2xA_3 - (x+1)(x-1)A_2
\end{aligned}
$$

同様にして,

$$
A_3 = 2xA_2 - (x+1)(x-1)(2x) \quad A_2 = (2x)^2 - (x+1)(x-1)
$$

$$
\begin{aligned}
A_2 =& 3x^2 + 1 = \frac{1}{2}\{(x+1)^3 - (x-1)^3\} \\
A_3 =& x\{(x+1)^3 - (x-1)^3\} - (x+1)(x-1)\frac{1}{2}\{(x+1)^2 - (x-1)^2\} \\
=& \frac{1}{2}\{(x+1)^4 - (x-1)^4\}
\end{aligned}
$$

よって,

$$
\begin{aligned}
A_4 =& x\{(x+1)^4 - (x-1)^4\} \\
&- \frac{1}{2}(x+1)(x-1)\{(x+1)^3 - (x-1)^3\} \\
=& \frac{1}{2}\{(x+1)^5 - (x-1)^5\} \blacksquare
\end{aligned}
$$

(注)　$A_n = \begin{vmatrix} 2x & x+1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x-1 & 2x & x+1 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & x-1 & 2x & x+1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 2x & x+1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x-1 & 2x \end{vmatrix}$ とおくと,

$$
\begin{aligned}
A_{n+1} =& 2x \underbrace{\begin{vmatrix} 2x & x+1 & 0 & \cdots & 0 \\ x-1 & 2x & x+1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 2x & x+1 \\ 0 & 0 & \cdots & x-1 & 2x \end{vmatrix}}_{n\ 次} \\
& - (x+1) \underbrace{\begin{vmatrix} x-1 & x+1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2x & x+1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 2x & x+1 \\ 0 & 0 & \cdots & x-1 & 2x \end{vmatrix}}_{n\ 次} \\
=& 2xA_n - (x+1)(x-1) \underbrace{\begin{vmatrix} 2x & x+1 & 0 & \cdots & 0 \\ x-1 & 2x & x+1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 2x & x+1 \\ 0 & 0 & \cdots & x-1 & 2x \end{vmatrix}}_{n-1\ 次} \\
=& 2xA_n - (x+1)(x-1)A_{n-1}
\end{aligned}
$$

つまり, 漸化式 $A_{n+1} = 2xA_n - (x+1)(x-1)A_{n-1}$ が成り立つ.

これを解くと,

$$A_n = \frac{1}{2}\{(x+1)^{n+1} - (x-1)^{n+1}\}$$

となる.

4.4　第 4 行から第 3 行の x 倍を, 第 3 行から第 2 行の x 倍を, 第 2 行から第 1 行の x 倍をこの順に引いて,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & w \\ x^2 & y^2 & z^2 & w^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & w^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & y-x & z-x & w-x \\ 0 & y^2-xy & z^2-xz & w^2-xw \\ 0 & y^3-xy^2 & z^3-xz^2 & w^3-xw^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} y-x & z-x & w-x \\ y^2-xy & z^2-xz & w^2-xw \\ y^3-xy^2 & z^3-xz^2 & w^3-xw^2 \end{vmatrix}$$

$$=(y-x)(z-x)(w-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & z & w \\ y^2 & z^2 & w^2 \end{vmatrix}$$

上と同じように処理すると,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & z & w \\ y^2 & z^2 & w^2 \end{vmatrix} = (z-y)(w-y)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ z & w \end{vmatrix} = (z-y)(w-y)(w-z)$$

よって,

$$(\text{与行列式}) = \underline{(y-x)(z-x)(w-x)(z-y)(w-y)(w-z)}$$

(注)　この行列式をファンデルモンドの行列式という.

一般には $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & {x_3}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\ {x_1}^3 & {x_2}^3 & {x_3}^3 & \cdots & {x_n}^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {x_1}^n & {x_2}^n & {x_3}^n & \cdots & {x_n}^n \end{vmatrix}$ で定義され,

$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n$ のなかから異なる 2 つを選び (${}_n\mathrm{C}_2$ 通り),
$(x_j - x_i)$ $(i < j)$ をすべてかけあわせたものになる.

4.5　E を n 次単位行列とすると,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A' & B' \\ O' & C' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA'+BO' & AB'+BC' \\ CO' & CC' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix}$$

であるから,

$$AA'+BO' = CC' = E, \quad AB'+BC' = CO' = O$$

$CO' = O$ で C は正則行列なので, C^{-1} が存在するから $O' = C^{-1}O = O$
よって, $AA' = CC' = E$ から $A' = A^{-1},\ C' = C^{-1}$
また, $AB' + BC' = O$ より, $AB' = -BC^{-1}$ よって, $B' = -A^{-1}BC^{-1}$
よって,

$$\underline{A' = A^{-1}, \quad B' = -A^{-1}BC^{-1}, \quad C' = C^{-1}}$$

4.6 $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ とおくと,

${}^t\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$, ${}^t\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} d & e & f \end{pmatrix}$, ${}^t\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} g & h & i \end{pmatrix}$ だから,

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix}$ よって,

$$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} ei - fh \\ fg - di \\ dh - eg \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} hc - ib \\ ia - gc \\ gb - ha \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} bf - ce \\ cd - af \\ ae - bd \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} & \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ei - fh & hc - ib & bf - ce \\ fg - di & ia - gc & cd - af \\ dh - eg & gb - ha & ae - bd \end{pmatrix}$$

一方, A の各成分の属する行, 列を取り除いてできる小行列式の作る行列は

$$\begin{pmatrix} ei - fh & di - fg & dh - eg \\ bi - ch & ai - cg & ah - bg \\ bf - ce & af - cd & ae - bd \end{pmatrix}$$

余因子行列 $\tilde{A}$ はこれを転置して, $(i,\ j)$ 成分を $(-1)^{i+j}$ 倍したものだから
$\begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} & \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ に一致する ■

また,

$$A\tilde{A} = \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{a} \\ {}^t\boldsymbol{b} \\ {}^t\boldsymbol{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c} & \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) & \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) & \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) \\ \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) & \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) & \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) \\ \boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) & \boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) & \boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) & \boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}) & \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}) \\ \boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}) & \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) & \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}) \\ \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{c}) & \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{c}) & \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix} = |A|E \blacksquare$$

5.1

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ とおく.

固有方程式は $\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 \\ -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2 - 1 = (\lambda-1)(\lambda-3) = 0.$

固有値は $\underline{1,\ 3}$

(i) 固有値 1 に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおく.

$$(A-E)\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

$x = s$ とおくと, $y = -s$.

よって, 固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1$ は $\underline{s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \ (s \neq 0)}$

(ii) 固有値 3 に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおく.

$$(A-3E)\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+y \\ x-y \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

$x = t$ とおくと, $y = t$.

よって, 固有ベクトル $\boldsymbol{v}_2$ は $\underline{t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ (t \neq 0)}$

$s=1,\ t=1$ とすると固有ベクトルは $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

$P=\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$ とおくと $P^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$

$$P^{-1}AP=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}}$$

(2)　$A=\begin{pmatrix}2&1\\2&3\end{pmatrix}$ とおく.

固有方程式は $\begin{vmatrix}\lambda-2&-1\\-2&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-3)-2=(\lambda-1)(\lambda-4)=0.$

固有値は $\underline{1,\ 4}$

(i)　固有値 1 に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ とおく.

$$(A-E)\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y\\2x+2y\end{pmatrix}=\mathbf{0}$$

$x=s$ とおくと $y=-s$.

よって, 固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1$ は $\underline{s\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\ (s\neq 0)}$

(ii)　固有値 4 に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ とおく.

$$(A-4E)\boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}-2&1\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2x+y\\2x-y\end{pmatrix}=\mathbf{0}$$

$x=t$ とおくと, $y=2t$.

よって, 固有ベクトル $\boldsymbol{v}_2$ は $\underline{t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\ (t\neq 0)}$

$s=1,\ t=1$ とすると固有ベクトルは $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

$P=\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix}$ とおくと $P^{-1}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1\\1&1\end{pmatrix}$

$$P^{-1}AP=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}}$$

(3) $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ とおく.

固有方程式は $\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & -3 \\ 0 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)=0.$

固有値は $\underline{1,\ 2,\ 3}$

(i) 固有値 1 に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおく.

$$(A-E)\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2y+3z \\ y+z \\ 2z \end{pmatrix}=\mathbf{0}$$

$y=z=0.$ $x=s$ とおく.

よって, 固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1$ は $\underline{s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ (s\neq 0)}$

(ii) 固有値 2 に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおく.

$$(A-2E)\boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -x-2y+3z \\ z \\ z \end{pmatrix}=\mathbf{0}$$

$z=0,\ x=2t$ とおくと, $y=-t.$

よって, 固有ベクトル $\boldsymbol{v}_2$ は $\underline{t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\ (t\neq 0)}$

(iii) 固有値 3 に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおく.

$$(A-3E)\boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2x-2y+3z \\ -y+z \\ 0 \end{pmatrix}=\mathbf{0}$$

$x=u$ とおくと, $y=z=2u.$

よって, 固有ベクトル $\boldsymbol{v}_3$ は $\underline{u\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \ (u \neq 0)}$

$s=1,\ t=1,\ u=1$ とすると固有ベクトルは

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ とおくと}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

(4) $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ とおく.

固有方程式は

$$\begin{vmatrix} \lambda & 2 & -3 \\ 1 & \lambda-1 & -1 \\ 2 & 2 & \lambda-5 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) = 0.$$

固有値は $\underline{1,\ 2,\ 3}$

(i) 固有値 1 に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおく.

$$(A-E)\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x-2y+3z \\ -x+z \\ -2x-2y+4z \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$x = s$ とおくと, $y = z = s$.

よって, 固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1$ は $\underline{s\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\ (s \neq 0)}$

(ii)　固有値 2 に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ とおく.

$$(A-2E)\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}-2 & -2 & 3\\-1 & -1 & 1\\-2 & -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2x-2y+3z\\-x-y+z\\-2x-2y+3z\end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

$x = t$ とおくと, $y = -t,\ z = 0$.

よって, 固有ベクトル $\boldsymbol{v}_2$ は $\underline{t\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\ (t \neq 0)}$

(iii)　固有値 3 に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ とおく.

$$(A-3E)\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix}-3 & -2 & 3\\-1 & -2 & 1\\-2 & -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3x-2y+3z\\-x-2y+z\\-2x-2y+2z\end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

$x = u$ とおくと, $y = 0,\ z = u$.

よって, 固有ベクトル $\boldsymbol{v}_3$ は $\underline{u\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\ (u \neq 0)}$

$s = 1,\ t = 1,\ u = 1$ とすると固有ベクトルは

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

$P = \begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & -1 & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ とおくと

$P^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\1 & 0 & -1\\-1 & -1 & 2\end{pmatrix}$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

(5) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ とおく.

固有方程式は $\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & -1 \\ 2 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda+2 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 9\lambda = \lambda(\lambda-3)(\lambda+3) = 0.$

固有値は $\underline{0,\ 3,\ -3}$

(i) 固有値 0 に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおく.

$$A\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2y+z \\ -2x+y+z \\ x+y-2z \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$x = s$ とおくと, $y = z = s$.

よって, 固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1$ は $\underline{s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ (s \neq 0)}$

(ii) 固有値 3 に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおく.

$$(A-3E)\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x-2y+z \\ -2x-2y+z \\ x+y-5z \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$x = t$ とおくと, $y = -t,\ z = 0$.

よって, 固有ベクトル $\boldsymbol{v}_2$ は $\underline{t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \ (t \neq 0)}$

(iii)　固有値 -3 に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおく．

$$(A+3E)\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x-2y+z \\ -2x+4y+z \\ x+y+z \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

$x = u$ とおくと, $y = u,\ z = -2u.$

よって, 固有ベクトル $\boldsymbol{v}_3$ は $\underline{u\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \ (u \neq 0)}$

$s = 1,\ t = 1,\ u = 1$ とすると固有ベクトルは

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ とおくと

$$P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

5.2

(1)　$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ とおく．

固有方程式は $\begin{vmatrix} \lambda-1 & -4 \\ 1 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-5)+4 = (\lambda-3)^2 = 0.$

固有値は $\underline{3(\text{重解})}$

固有ベクトルを $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおく.

$$(A-3E)\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x+4y \\ -x+2y \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$y = t$ とおくと, $x = 2t$.

よって, 固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ は $\underline{t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\ (t \neq 0)}$

$t = 1$ とすると重解 3 の固有ベクトルは $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$(A-3E)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$ となる $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を求める.

$$(A-3E)\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$-x+2y = 1.\quad y = s$ とおくと, $x = 2s-1$.

$s = 0$ とすると, $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v} & \boldsymbol{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ とおく.

固有方程式は

$$\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda - 4 = (\lambda-1)^2(\lambda-4) = 0.$$

固有値は $\underline{1,\ 4}$

(i) 固有値 1 に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおく.

$$(A-E)\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y+z \\ x+y+z \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$x+y+z=0$ だから, $x=s,\ y=t,\ z=-s-t$ とおける.

よって, 固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1$ は $\underline{s\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\quad ((s,\ t)\neq(0,\ 0))}$

(ii) 固有値 4 に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ とおく.

$$(A-4E)\boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2x+y+z\\x-2y+z\\x+y-2z\end{pmatrix}=\mathbf{0}$$

$x=u$ とおくと, $y=z=u$.

よって, 固有ベクトル $\boldsymbol{v}_2$ は $\underline{u\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\quad (u\neq 0)}$

$\boldsymbol{w}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ とおくと, $\boldsymbol{w}_1,\ \boldsymbol{w}_2$ はそれぞれ $(s,\ t)=(1,\ 0),\ (0,\ 1)$ のときの $\boldsymbol{v}_1$. $u=1$ とすると, $\boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. $\boldsymbol{w}_1,\ \boldsymbol{w}_2,\ \boldsymbol{v}_2$ は一次独立な固有ベクトル.

$P=\begin{pmatrix}\boldsymbol{w}_1&\boldsymbol{w}_2&\boldsymbol{v}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$ とおくと

$$P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$=\underline{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}}$$

(注) 対称行列は互に垂直な固有ベクトルをもつことが知られている. (6 章で扱う)

$\boldsymbol{v}_1$ を表す 2 つのベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は垂直でないが,

$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は垂直である.

$\boldsymbol{v}_1 = \dfrac{s}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \dfrac{s+2t}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とも表されるから, 3 つの互に垂直な固有ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ をもつことになる.

(3) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ とおく.

固有方程式は

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & -2 \\ 1 & \lambda-1 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = (\lambda-1)^2(\lambda-2) = 0.$$

固有値は $\underline{1(\text{重解}),\ 2}$

(i) 固有値 1 に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおく.

$$(A-E)\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x-y+2z \\ -x+z \\ -x-y+2z \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$x = s$ とおくと, $y = z = s$.

よって, 固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1$ は $\underline{s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (s \neq 0)}$

(ii) 固有値 2 に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおく.

$$(A-2E)\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x-y+2z \\ -x-y+z \\ -x-y+z \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$x=t$ とおくと, $y=0,\ z=t$.

よって, 固有ベクトル $\boldsymbol{v}_2$ は $\underline{t\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\ (t\neq 0)}$

$s=1,\ t=1$ とすると固有ベクトルは $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

重解 1 の固有ベクトルは $\boldsymbol{v}_1$.

$(A-E)\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}_1$ となる $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ を求める.

$$(A-E)\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}-1&-1&2\\-1&0&1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x-y+2z\\-x+z\\-x-y+2z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

$x=u$ とおくと, $y=1+u,\ z=1+u$. $u=0$ とすると, $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

$P=\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1&\boldsymbol{u}&\boldsymbol{v}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$ とおくと

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}P^{-1}AP&=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&2\\-1&1&1\\-1&-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\\&=\underline{\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}}\end{aligned}$$

(4) $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&1\\1&-1&3\end{pmatrix}$ とおく.

固有方程式は

$$\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\-1&\lambda-1&-1\\-1&1&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-2)\{(\lambda-1)(\lambda-3)+1\}=(\lambda-2)^3=0.$$

固有値は $\underline{2(3\text{ 重解})}$

固有ベクトルを $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおく.

$$(A-2E)\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ x-y+z \\ x-y+z \end{pmatrix}=\mathbf{0}$$

$x=s,\ z=t$ とおくと, $y=s+t$.

よって, 固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ は $\underline{s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\quad ((s,\ t)\neq(0,\ 0))}$

$(A-2E)\boldsymbol{u}$ が固有ベクトルになる $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を求める.

$$\begin{aligned}(A-2E)\boldsymbol{u}=&\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ x-y+z \\ x-y+z \end{pmatrix}\\ =&(x-y+z)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\boldsymbol{w}_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおくと, $\boldsymbol{w}_1,\ \boldsymbol{w}_2$ はそれぞれ $(s,\ t)=(1,\ 0),\ (0,\ 1)$ のときの $\boldsymbol{v}$ でこれらは一次独立な固有ベクトル. さらに $x-y+z=1$ とすれば, $(A-2E)\boldsymbol{u}=\boldsymbol{w}_1$ となる.

ここで, $x=1,\ y=0$ とすれば $z=0$ で $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$P=\begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_1 & \boldsymbol{u} & \boldsymbol{w}_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \underline{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

(5) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ とおく.

固有方程式は

$$\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 1 \\ 1 & \lambda-5 & 1 \\ 0 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 9\lambda^2 + 27\lambda - 27 = (\lambda-3)^3 = 0.$$

固有値は $\underline{3(3\text{ 重解})}$

固有ベクトルを $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおく.

$$(A-3E)\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+2y-z \\ -x+2y-z \\ y-z \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

$x = s$ とおくと, $y = z = s$.

よって, 固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ は $\underline{s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (s \neq 0)}$

$s = 1$ とおくと, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$(A-3E)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$ となる $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を求める.

$$(A-3E)\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+2y-z \\ -x+2y-z \\ y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x=t$ とおくと $y=t,\ z=t-1$. $t=1$ とおくと, $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

$(A-3E)\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}$ となる $\boldsymbol{w}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ を求める.

$$(A-3E)\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}-1&2&-1\\-1&2&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x+2y-z\\-x+2y-z\\y-z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$x=u$ とおくと $y=u+1,\ z=u+1$. $u=0$ とおくと, $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

$P=\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}&\boldsymbol{u}&\boldsymbol{w}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$ とおくと

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\-1&1&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}P^{-1}AP&=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&-1\\-1&5&-1\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\\&=\underline{\begin{pmatrix}3&1&0\\0&3&1\\0&0&3\end{pmatrix}}\end{aligned}$$

5.3 A の固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, 固有値を $\lambda_1=2,\ \lambda_2=4,\ \lambda_3=-2$ とおくと,
$A\boldsymbol{v}_i=\lambda_i\ A^2\boldsymbol{v}_i=A(A\boldsymbol{v}_i)=\lambda_iA\boldsymbol{v}_i={\lambda_i}^2\boldsymbol{v}_i$ よって,

$$B\boldsymbol{v}_i=(A^2+A+E)\boldsymbol{v}_i=({\lambda_i}^2+\lambda_i+1)\boldsymbol{v}_i$$

よって, B の固有ベクトルは

$$\underline{\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}$$

でそれぞれに対する固有値は, $2^2+2+1,\ 4^2+4+1,\ (-2)^2+(-2)+1$ つまり, 7, 21, 3 である.

(注)　一般に行列 A の固有値が λ_i で固有ベクトルが $\boldsymbol{v}_i$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ s)$ のとき, A の多項式 $f(A)=a_nA^n+a_{n-1}A^{n-1}+\cdots+a_1A+a_0E$ の固有ベクトルは A の固有ベクトル $\boldsymbol{v}_i$ で, その固有値は $f(\lambda_i)$ である. これをフロベニウスの定理という.

5.4　$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ の固有方程式は

$(\lambda-2)(\lambda-4)(\lambda+2)=0$

$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ とおくと, $A=PDP^{-1}$

$$\begin{aligned}
&(A-2E)(A-4E)(A+2E) \\
&\qquad =(PDP^{-1}-2E)(PDP^{-1}-4E)(PDP^{-1}+2E) \\
&\qquad =P(D-2E)P^{-1}P(D-4E)P^{-1}P(D+2E)P^{-1} \\
&\qquad =P(D-2E)(D-4E)(D+2E)P^{-1} \\
&\qquad =P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} \\
&\qquad =POP^{-1}=O
\end{aligned}$$

よって, 求める行列は 零行列.

(注)　一般に固有多項式 $f_A(\lambda)$ の λ に行列 A を代入してできる行列の多項式 (定数項には E をかける) $f_A(A)$ は零行列になる. これをケイリー・ハミルトンの定理という.