# 練習問題【解答】

## 第 1 章

### 1.1

電車の加速度を $\alpha$，A, B 両駅間の距離を $L$ とすると，等加速度運動のときに成り立つ関係式(1.3)より，

$$v_2^2 - v_1^2 = 2\alpha L, \qquad v_C^2 - v_1^2 = 2\alpha \cdot \frac{L}{2}$$

これら２式より $\alpha L$ を消去して，

$$v_C^2 - v_1^2 = \frac{1}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) \quad \therefore \quad v_C = \underline{\sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2}{2}}}$$

### 1.2

円の中心 O を原点に，線分 OA に沿って $x$ 軸，$x$ 軸に垂直に $y$ 軸をとる。円運動する点 Q の角速度は $\omega = 1$ で一定である。時刻 $t$ における点 Q の位置は $\boldsymbol{x}_Q = (\cos t, \sin t)$ であるから，Q の速度は，

$$\boldsymbol{v}_Q = \dot{\boldsymbol{x}}_Q = (-\sin t, \cos t)$$

と書ける。点 P の速度は $\boldsymbol{v}_P = (0, 1)$ であるから，点 P の Q に対する相対速度は，

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{v}_P - \boldsymbol{v}_Q = \underline{(\sin t, 1 - \cos t)}$$

$\boldsymbol{V} = (V_x, V_y)$ とおくと，$\sin t = V_x$，

$\cos t = 1 - V_y$ となるから，

$$V_x^2 + (V_y - 1)^2 = 1$$

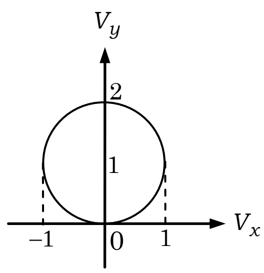

図 1a

となる。ホドグラフは，$V_y = 1$ を中心とする半径 1 の円となる（図 1a）。

## 1.3

加速度の極座標表現(1.16)において，$\dot{r} = \ddot{r} = 0$とおいて，

$$a_\theta = r\ddot{\theta} = \beta$$

初期条件「$t = 0$のとき$v_\theta = r\dot{\theta} = 0$，$\theta = 0$」より，$\ddot{\theta} = \beta / r$を$t$に関して積分して，$\dot{\theta} = \frac{\beta}{r} t$，$\theta = \frac{1}{2}\frac{\beta}{r} t^2$となる。これから，

$$a_r = -r(\dot{\theta})^2 = -\frac{\beta^2}{r} t^2 = -2\beta\theta$$

を得る。加速度の大きさは，

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = \underline{\beta\sqrt{1+4\theta^2}}$$

となる。ここで，$\tan\phi = \left|\frac{a_r}{a_\theta}\right| = 2\theta$となるので，加速度の向きは，接線方向から<u>中心方向に$\tan\phi = 2\theta$を満たす角度$\phi$の向き。</u>

# 第2章

## 2.1

床から物体に作用する垂直抗力の大きさを$N$，静止摩擦力の大きさを$f$とすると，物体のつり合いは，

水平方向：$F\cos\theta = f$，　鉛直方向：$N + F\sin\theta = mg$

物体が滑らない条件は，

$$f \le \mu N \quad \Leftrightarrow \quad F\cos\theta \le \mu(mg - F\sin\theta)$$

よって，

$$\underline{\mu \ge \frac{F\cos\theta}{mg - F\sin\theta}}$$

## 2.2

ボールを$x$軸から上向きに角$\theta$の方向に投げるとする。投げ出してからボールが最高点に達するまでの時間を$t$とすると，最高点ではボールの速度の$y$成分はゼロとなるから，

$$0 = v_0 \sin\theta - gt \quad \therefore \quad t = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$$

ボールは水平方向に等速運動，鉛直方向に，加速度$-g$の等加速度運動をするから，最高点の$x$座標と$y$座標はそれぞれ，

$$x = v_0 \cos\theta \cdot t = \frac{v_0^2}{2g}\sin 2\theta \tag{2a}$$

$$y = v_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\theta = \frac{v_0^2}{4g}(1-\cos 2\theta) \tag{2b}$$

となる。ここで，２倍角の公式

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta, \qquad \cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

を用いた。(2a), (2b)式より，

$$\sin 2\theta = \frac{x}{v_0^2/2g}, \quad \cos 2\theta = \frac{(v_0^2/4g) - y}{v_0^2/4g}$$

となる。$\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta = 1$より，$a = \dfrac{v_0^2}{2g}$とおいて，

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y - a/2)^2}{(a/2)^2} = 1$$

を得る。これは，点$(0, a/2)$を中心とした，$x$方向の長半径$a$，$y$方向の短半径$a/2$の楕円である。

**2.3**

ボールの質量を$m$，鉛直上向きの速度を$v$とすると，運動方程式は，

$$m\frac{dv}{dt} = -mkv^2 - mg \quad \therefore \quad \frac{1}{k}\frac{dv}{v^2 + g/k} = -dt$$

となる。積分公式(2.25)の第１式を用いて両辺を積分すると，

$$\frac{1}{\sqrt{kg}}\tan^{-1}\left(v\sqrt{\frac{k}{g}}\right) = -t + C \quad (C: \text{積分定数})$$

ここで，初期条件「$t = 0$のとき，$v = v_0$」より$C$を定めて，

$$t = \frac{1}{\sqrt{kg}}\left[\tan^{-1}\left(v_0\sqrt{\frac{k}{g}}\right) - \tan^{-1}\left(v\sqrt{\frac{k}{g}}\right)\right]$$

最高点に達するまでの時間 $t_0$ は,「$t = t_0$ で $v = 0$」より,

$$t_0 = \frac{1}{\sqrt{kg}}\tan^{-1}\left(v_0\sqrt{\frac{k}{g}}\right)$$

となる。ここで，初速 $v_0 \to \infty$ のとき，$t_0 \to \dfrac{\pi}{2\sqrt{kg}}$ となり，どんなに初速を大きくしても，$t_0$ は $\dfrac{\pi}{2\sqrt{kg}}$ を超えないことがわかる（図 2a)。

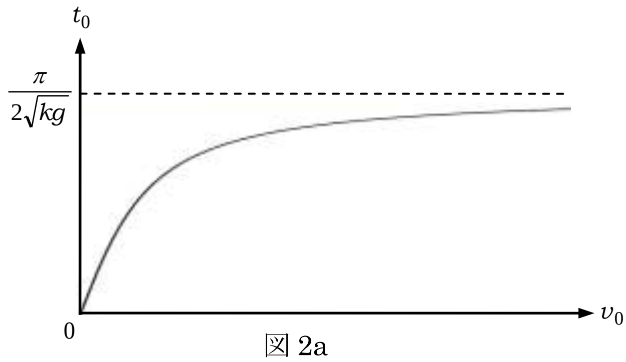


図 2a

次に，投げ上げた点を原点に，鉛直上向きに $y$ 軸をとる。$\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dv}{dy}\dfrac{dy}{dt} = v\dfrac{dv}{dy}$ を用いると，運動方程式は,

$$v\frac{dv}{dy} = -kv^2 - g \quad \therefore \quad \frac{1}{k}\frac{v}{v^2 + g/k}dv = -dy$$

となる。積分公式(2.25)の第２式を用いて，両辺を積分して,

$$\frac{1}{2k}\log\left(v^2 + g/k\right) = -y + C' \quad \text{（}C'\text{：積分定数）}$$

初期条件「$y = 0$ で $v = v_0$」より $C'$ を決めると,

$$\frac{1}{2k}\log\frac{v_0^2+g/k}{v^2+g/k}=y$$

となる。最高点では$v=0$となるから，その高さ$y=h$は，

$$h=\frac{1}{2k}\log\frac{v_0^2+g/k}{g/k}=\underline{\frac{1}{2k}\log\frac{g+kv_0^2}{g}}$$

となることがわかる。

## 第3章

### 3.1

時刻$t=0$に固定を解くと，物体は斜面上を下降し始める。そこで，時刻$t_1$（$<t_0$）で速度がゼロになると仮定する。図3aのように，物体には，重力$mg$，垂直抗力$N$と力$F$が作用し，$N$は斜面に沿った力積を与えない。時刻$t$（$<t_0$）で，物体に作用する斜面に沿った力の成分は，斜面に沿って上向きを正として，$F=\dfrac{2mg}{t_0}t$と$-mg\sin45°$である。(3.1)式より，時刻$t_1$は，

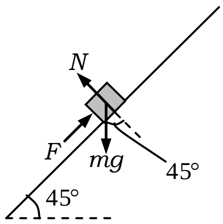

図3a 物体に作用する力

$$0-0=\int_0^{t_1}\left(\frac{2mg}{t_0}t-mg\sin45°\right)dt$$

$$\frac{1}{2}\frac{2mg}{t_0}t_1{}^2-\frac{1}{\sqrt{2}}mg\cdot t_1=0 \qquad \therefore \quad t_1=\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}t_0}$$

となる。

時刻$t_1$以降物体の速度は正となる。時刻$2t_0$における物体の速度$v_0$は，$t=0$から$t=2t_0$までの力積を考えて，

$$mv_0-0=\frac{1}{2}\frac{2mg}{t_0}t_0{}^2+\frac{1}{2}mg(2t_0-t_0)-\frac{1}{\sqrt{2}}mg\cdot 2t_0$$

$$\therefore \quad v_0=\underline{\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)gt_0}\ \ (>0)$$

となる。これより$2t_0$以降，速度が再度ゼロになる時刻$t_2$は，

$$\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)mgt_0-\frac{1}{\sqrt{2}}mg(t_2-2t_0)=0 \quad \therefore \quad t_2=\underline{\frac{3\sqrt{2}}{2}t_0}$$

と求められる。

（参考）

物体の$v-t$グラフは次のように求められる。

$0 \leq t \leq t_0$ では，物体の速度$v$は，

$$mv=\frac{1}{2}\frac{2mg}{t_0}t^2-\frac{1}{\sqrt{2}}mg\cdot t \quad \therefore \quad v=gt_0\left(\frac{t^2}{t_0^2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{t}{t_0}\right)$$

と変化し，$t_0 < t < 2t_0$ では，$v_0$ を求めたときと同様に，

$$mv=\frac{1}{2}\frac{2mg}{t_0}{t_0}^2+\frac{1}{2}mg(t-t_0)-\frac{1}{\sqrt{2}}mg\cdot t$$

$$\therefore \quad v=\frac{1}{2}gt_0\left\{1-(\sqrt{2}-1)\frac{t}{t_0}\right\}$$

$2t_0 < t$ では，

$$v=\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)gt_0-\frac{1}{\sqrt{2}}g(t-2t_0)=\frac{1}{\sqrt{2}}gt_0\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{t}{t_0}\right)$$

と変化する。こうして，図 3b を得る。

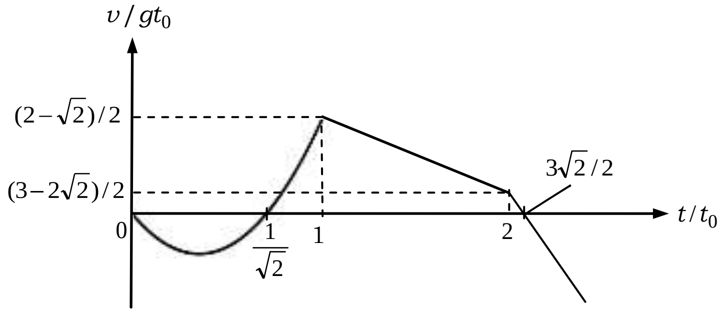


図 3b 物体の速度変化

**3.2**

人が板を斜面上方に蹴る力の大きさを$F$とすると，板が静止するとき力

はつり合うから，

$$F = Mg\sin\theta$$

板から人に大きさは$F$の力が斜面下向きに作用するから，人の運動方程式は，

$$m\alpha = mg\sin\theta + F$$

これらより$F$を消去して，求める加速度の大きさは，

$$m\alpha = (m+M)g\sin\theta \quad \therefore \quad \alpha = \underline{\left(1+\frac{M}{m}\right)g\sin\theta}$$

と求められる。

**3.3**

固定された木片に衝突する直前の弾丸の速さが$v_0$のとき，木片を貫通した弾丸の速さは 0 となるから，「運動エネルギー変化＝抵抗力の仕事」より，

$$0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -R\cdot d \tag{3a}$$

初速$v_0$の弾丸が自由に動くことのできる木片の中で静止したとき，木片と弾丸の速さ$V$は，運動量保存則より，

$$mv_0 = (m+M)V \quad \therefore \quad V = \frac{m}{m+M}v_0 \tag{3b}$$

弾丸が自由に動ける木片中を進む距離を$l$とすると（例題.3.4 の「ちょっと一言」に注意），

$$\frac{1}{2}(m+M)V^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -R\cdot l \tag{3c}$$

(3a)～(3c)式より，

$$l = \underline{\frac{M}{m+M}d}$$

を得る。

## 第 4 章

**4.1**

(1)　ベルト上を滑っているとき，動摩擦力が小物体に$x$軸正の向きに作用

する。小物体の運動方程式は,

$$m\ddot{x} = -kx + \mu mg = -k(x - x_0)\,,\quad x_0 = \frac{\mu mg}{k}$$

となり，小物体は $x = x_0$ を中心とした単振動をする。小物体がベルトに追いつくには，中心 $x = x_0$ での小物体の速度 $v$ がベルトの速度以上になればよい。

$x = 0$ で $v = 0$， $x = x_0$ で $v$ であることから，単振動のエネルギー保存則(4.8)は,

$$0 + \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + 0 \quad \therefore \quad v = x_0\sqrt{\frac{k}{m}} = \underline{\mu g\sqrt{\frac{m}{k}}} \geq v_0$$

(2)　再びベルトに対して滑り出す点 $x_c$ では， $x$ 軸正の向きに最大摩擦力 $\mu_0 mg$ が小物体に作用する。滑り出す直前の小物体のつり合いより,

$$\mu_0 mg = kx_c \quad \therefore \quad x_c = \frac{\mu_0 mg}{k}$$

点 $x_c$ で小物体が滑り出すときの速度は，ベルトの速度 $v_0$ である。折り返し点を $x = d$ とすると，単振動のエネルギー保存則より,

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}k(x_c - x_0)^2 = \frac{1}{2}k(d - x_0)^2$$

$d > x_0$ より,

$$d = x_0 + \sqrt{\frac{mv_0^2}{k} + (x_c - x_0)^2} = \underline{x_0 + \frac{mg}{k}\sqrt{\frac{kv_0^2}{mg^2} + (\mu_0 - \mu)^2}}$$

小物体の運動の概略を図 4a に示す。１重線部分では，小物体は $x = x_0$ を中心とする単振動の一部分の運動をし，２重線部分では，ベルトと共に，速さ $v_0$ の等速度運動をする。

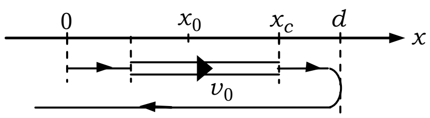

図 4a

**4.2**

図 4b のように，板と小物体が離れずに位置 $x$ を運動しているとき，板

と小物体の運動方程式は，板から小物体に作用する垂直抗力の大きさを $N$ として，それぞれ，

$$\text{小物体：} \quad M\ddot{x} = N - Mg \qquad (4a)$$

$$\text{板} \quad : \quad M\ddot{x} = -kx - N - Mg \qquad (4b)$$

と書ける。

(4a)，(4b)式より $\ddot{x}$ を消去すると，

$$N = -\frac{1}{2}kx$$

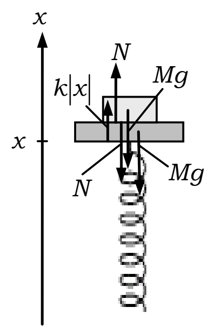

図 4b

となる。板と小物体が接している限り $N > 0$ であり，離れる瞬間に $N = 0$ となる。よって，小物体が離れる座標は，$N = 0$ より，$x_0 = \underline{0}$ と求められる。これは，ばねの自然長の位置である。

ちょっと一言　離れるのが自然長の位置であることは，直観的に理解できるよ。図 4b のように，ばねの長さが自然長より短いとき，ばねが伸びようとする弾性力が板を介して垂直抗力 $N$ として小物体に伝わるが，ばねが自然長より長くなると，ばねが縮もうとする弾性力は，板の上の小物体には伝わらない。したがって，小物体は板から離れてしまうね。

板と小物体が一体になっているときの運動方程式は，(4a)式と(4b)式の辺々和をとり，$x_1 = \dfrac{Mg}{k}$ として，

$$2M\ddot{x} = -kx - 2Mg = -k(x + 2x_1)$$

と書ける。これより，小物体と板は，$x = -2x_1$ を中心に角振動数 $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{2M}}$ で単振動をすることがわかる。一体の運動方程式は，

$$\begin{cases} x = -l \\ v = \dot{x} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ v = v_0 \end{cases}$$

の間，成立する。この間の単振動のエネルギー保存則は(4.8)式より，

$$\frac{1}{2}k(-l + 2x_1)^2 = \frac{1}{2}2Mv_0^2 + \frac{1}{2}k(2x_1)^2$$

$$\therefore \quad v_0 = \sqrt{\frac{k}{2M}(l^2 - 4lx_1)} = \underline{\sqrt{\frac{kl^2}{2M} - 2gl}} \tag{4c}$$

を得る。

小物体が離れた後の板の運動方程式は，

$$M\ddot{x} = -kx - Mg = -k(x + x_1)$$

となり，板は $x = -x_1$ を中心に周期

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} \tag{4d}$$

で単振動をする。小物体は速度 $v_0$ で板から離れて時間 $T$ の後，離れた点 $x_0 = 0$ に戻るのであるから，等加速度運動の式

$$v_0 T - \frac{1}{2}gT^2 = 0 \tag{4e}$$

が成り立つ。(4c)，(4d)，(4e)式より $v_0$ と $T$ を消去すると，

$$(kl)^2 - 4Mgkl - 2\pi^2(Mg)^2 = 0$$

となる。ここで，$l > 0$ であるから，

$$l = \underline{\left(1 + \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{2}}\right)\frac{2Mg}{k}}$$

板と小物体の $x - t$ グラフの概略を図 4c に示す。太い実線は板と小物体が一体となった運動を，細い実線は板の運動，破線は小物体の運動を表している。

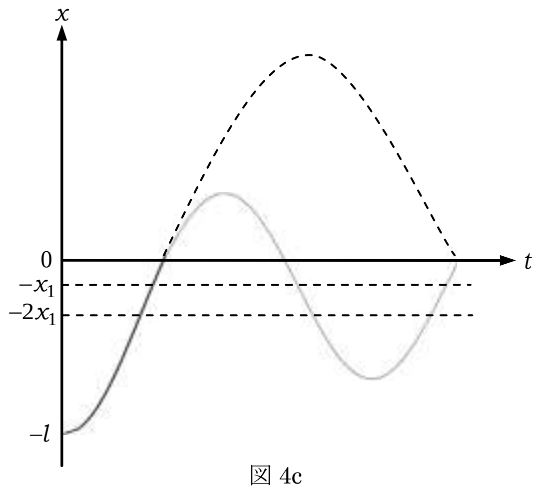

図 4c

## 4.3

時刻 $t$ での小物体の座標を $x$ とすると，ばねの伸びは $x-x_{\mathrm{B}}-l$ となるから，運動方程式は,

$$m\ddot{x}=-k(x-l-A\sin\omega t) \tag{4f}$$

となる。ここで， $X=x-l$ とおき， $k=m\omega_0^2$ より，(4f)式は,

$$\ddot{X}+\omega_0^2X=\omega_0^2A\sin\omega t \tag{4g}$$

となる。(4g)式は(4.29)式で $\mu=0$ とおいた式である。その一般解は(4.30)式で $B,\phi$ （$0\le\phi<\pi$）を２つの任意定数として,

$$x=l+B\sin(\omega_0t+\phi)+\frac{\omega_0^2A}{\omega_0^2-\omega^2}\sin\omega t \tag{4h}$$

(4h)式を $t$ で微分すると,

$$\dot{x}=B\omega_0\cos(\omega_0t+\phi)+\frac{\omega_0^2\omega A}{\omega_0^2-\omega^2}\cos\omega t$$

となる。

初期条件「$t=0$ のとき， $x=l$， $v=\dot{x}=0$」を用いる。

$$0 = B\sin\phi,\quad 0 = B\omega_0\cos\phi + \frac{\omega_0^2\omega A}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$\omega_0^2\omega A \neq 0$ より，$B \neq 0$，よって，$\sin\phi = 0 \Leftrightarrow \phi = 0$ となる。これより，

$B = -\dfrac{\omega_0\omega A}{\omega_0^2 - \omega^2}$ となる。こうして，

$$\underline{x = l + \frac{\omega_0^2 A}{\omega_0^2 - \omega^2}\left(\sin\omega t - \frac{\omega}{\omega_0}\sin\omega_0 t\right)}$$

## 第 5 章

### 5.1

(1)　図 5a のように，水平右向きに $x$ 軸，鉛直下向きに $y$ 軸をとる。小物体の質量を $m$ として，小物体には，重力 $mg$ と斜面から垂直抗力 $N$ が作用するから，運動方程式は，

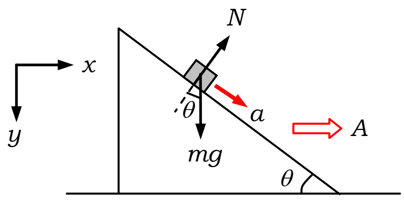

図 5a

$$x \text{ 方向：} m(a\cos\theta + A) = N\sin\theta$$
$$y \text{ 方向：} ma\sin\theta = mg - N\cos\theta$$

この２式より $N$ を消去すると，

$$a = \underline{g\sin\theta - A\cos\theta}$$

(2)　図 5b のように，小物体には重力 $mg$ と垂直抗力 $N$ の他に，大きさ $mA$ の慣性力が水平左向きに作用する。斜面に沿って下向きの運動方程式より，

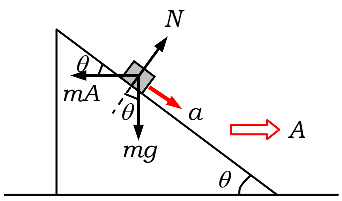

図 5b

$$ma = mg\sin\theta - mA\cos\theta$$

$$\therefore\quad a = \underline{g\sin\theta - A\cos\theta}$$

## 5.2

おもりの質量を $m$ とする。エレベータが静止した状態で，おもりが最下点に来たときの速さを $v_0$ とすると，力学的エネルギー保存則は，

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgl(1-\cos\theta_0) \tag{5a}$$

エレベータが加速度 $a$ で上昇しているとき，おもりには重力 $mg$ の他，鉛直下向きに慣性力 $ma$ が作用するから，見かけ上，おもりにはたらく重力加速度が $g' = g + a$ に増加したことになる。よって，$g'$ を用いた力学的エネルギー保存則は，

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mg'l(1-\cos\theta_1) \tag{5b}$$

(5a)，(5b)式より，$v_0^2$ を消去して，関係式 $1-\cos\theta = 2\sin^2\dfrac{\theta}{2}$ より，

$$\sin\frac{\theta_1}{2} = \sqrt{\frac{g}{g'}}\sin\frac{\theta_0}{2} = \underline{\sqrt{\frac{g}{g+a}}\sin\frac{\theta_0}{2}}$$

## 5.3

地球の半径を $R$ とすると，点 P で小物体は東向きに初速 $v_\mathrm{P} = (R+h)\omega$ をもち，点 H は速さ $v_\mathrm{H} = R\omega$ で等速運動している。また，図 5c に示すように，小物体が点 P から落下をはじめて時間 $t$ だけたったとき，慣性系で見て小物体が東向きに移動した距離 $x$ は，点 H の移動距離にほぼ等しく，$x \approx R\omega t$ と書ける。したがって，小物体が受ける重力の西向き成分は，ほぼ $mg\dfrac{x}{R} \approx mg\omega t$ となり，その西向きの加速度成分は $g\omega t$ となる。よって小物体の‘より’正確な変位 $x$ は，初期条件

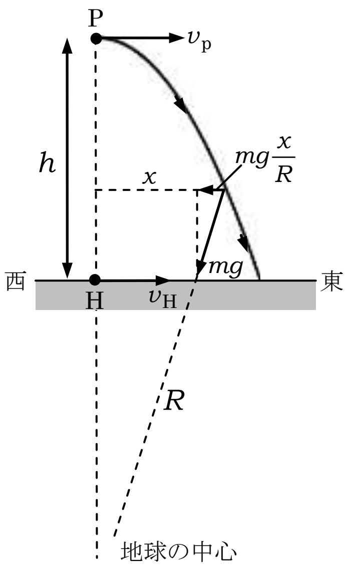

図 5c

「$t=0$ のとき $x=0,\ \dot{x}=v_{\mathrm{P}}$」より，

$$\ddot{x}=-g\omega t \quad \Rightarrow \quad \dot{x}=v_{\mathrm{P}}-\frac{1}{2}g\omega t^2$$

$$\Rightarrow \quad x=(R+h)\omega t-\frac{1}{6}g\omega t^3$$

となる。赤道上の点 H からの変位 $x'$ は,

$$x'=x-v_{\mathrm{H}}t=h\omega t-\frac{1}{6}g\omega t^3$$

である。小物体が地表面に落下するまでの時間をあらためて $t$ として，

$h=\dfrac{1}{2}gt^2$ を代入すると，

$$x'=\frac{1}{2}g\omega t^3-\frac{1}{6}g\omega t^3=\frac{1}{3}\omega g t^3=\frac{2}{3}h\omega\sqrt{\frac{2h}{g}}\approx \underline{2.2\ \mathrm{cm}}$$

となる。

（注）例題 5.8 の結果は，小物体の落下速度の鉛直成分が，自由落下の場合に等しいとみなして計算したもので，近似的な結果である。一方，ここでは，近似であることをあらわに書いた。

## 第 6 章

### 6.1

(1)　小物体 P には，重力 $mg$ と垂直抗力 $N$ が作用する（図 6a)。P から軸 L に引いた垂線 PH の長さは $r=h\tan\theta$ である。水平面内での中心方向の運動方程式と鉛直方向のつり合いの式は,

$$m\frac{v^2}{h\tan\theta}=N\cos\theta,\quad N\sin\theta=mg$$

これらより $N$ を消去して，$\underline{v=\sqrt{gh}}$

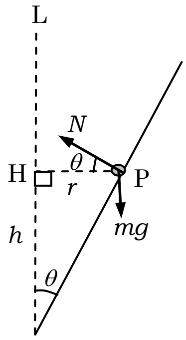

図 6a

(2)　小物体 P には重力と垂直抗力がはたらき，合力は円錐の中心軸 L に向かう。よって，軸 L のまわりの力のモーメントはゼロであり，L のまわりの角運動量，すなわち，角運動量の鉛直成分は保存する。円錐内面

上を運動する P の水平方向の速度成分は，動径 PH に垂直である。最高点での速さを$v_1$とすると，角運動量保存則は，

$$m \cdot 2v \cdot h\tan\theta = mv_1 \cdot h_1 \tan\theta \quad \therefore \quad v_1 = 2v\frac{h}{h_1}$$

力学的エネルギー保存則は，

$$\frac{1}{2}m(2v)^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1$$

これらより$v_1$を消去し，$v^2 = gh$ を代入して，

$$h_1^3 - 3hh_1^2 + 2h^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (h_1 - h)(h_1^2 - 2hh_1 - 2h^2) = 0$$

$h_1 \neq h$，$h_1 > 0$ より，$h_1 = \underline{(1+\sqrt{3})h}$

**6.2**

まず，O を中心とした半径$r$ と$r + dr$ の円周で挟まれた円輪部分が質点 P に及ぼす万有引力$dF$ を求める（図 6b）。円板の面密度は$\rho = \dfrac{M}{\pi R^2}$ であるから，円輪の質量は，$dM = \rho \cdot 2\pi r dr$ であり，円輪から質点 P までの距離は$\sqrt{L^2 + r^2}$ である。対称性より，円輪から質点に作用する力$dF$ は，直線 PO 方向を向くから（図 6c），

$$dF = G\frac{dM \cdot m}{L^2 + r^2} \cdot \frac{L}{\sqrt{L^2 + r^2}} = 2\pi\rho GLm\frac{rdr}{(L^2 + r^2)^{3/2}}$$

これより，

$$F = \int dF = 2\pi\rho GLm\int_0^R \frac{rdr}{(L^2 + r^2)^{3/2}} = \underline{2G\frac{Mm}{R^2}\left(1 - \frac{L}{\sqrt{L^2 + R^2}}\right)}$$

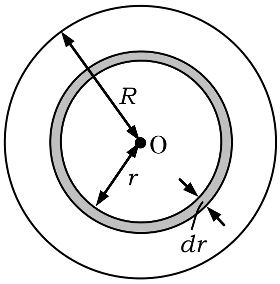


図 6b

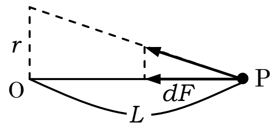


図6$c$

## 6.3

(1)　(6.27)式より，

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt}(\dot{r}) = \frac{d}{dt}\left(-h\frac{du}{d\theta}\right) = \frac{d\theta}{dt}\frac{d}{d\theta}\left(-h\frac{du}{d\theta}\right) = -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

　また，(6.26)式より，$r\dot{\theta}^2 = h^2u^3$ となるから，これらを(6.33)式に代入し，$-h^2u^2$ でわって(6.34)式を得る。

(2)　(6.34)式は非斉次微分方程式であるから，4.3.1 節で述べられているように，その一般解は，斉次方程式の一般解と非斉次方程式の特解の和で与えられる。(6.34)の斉次方程式は,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = 0$$

であるから，その一般解は，$A, B$ を任意定数として,

$$u = A\cos\theta + B\sin\theta$$

と書ける。非斉次方程式(6.34)の特解の 1 つは定数で，$u = \dfrac{GM}{h^2}$ と書けることは明らかである。よって，(6.34)式の一般解は,

$$u = A\cos\theta + B\sin\theta + \frac{GM}{h^2} \tag{6a}$$

となる。ここで，「$\theta = 0$ のとき，$r$ が極大（$u$ が極小)」の条件，すなわち，$\theta = 0$ で $du/d\theta = 0$（極値をとる条件)，かつ，$d^2u/d\theta^2 > 0$（グラフが下に凸）の条件を用いる。こうして,

「$\left(\dfrac{du}{d\theta}\right)_{\theta=0} = B = 0$，$\left(\dfrac{d^2u}{d\theta^2}\right)_{\theta=0} = -A > 0 \quad \Leftrightarrow \quad A < 0$」

より，$\dfrac{GM}{h^2} = \dfrac{1}{l}$，$A = -\dfrac{e}{l}$ とおいて，

$$u = -\frac{e}{l}\cos\theta + \frac{1}{l}$$

となり，(6.35)式を得る。

> ちょっと一言　(6.34)式は，$\dfrac{d^2u}{d\theta^2} = -\left(u - \dfrac{GM}{h^2}\right)$ となるから，その一般解が(6a)式で与えられることは明らかだね。

## 第 7 章

### 7.1

ガスの速度が 0 であるから，(7.20)式で $v' = v$，$F = -mg$ とおいて，

$$m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt} = -mg \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(mv) = -mg$$

これより，

$$mv = -mgt + C$$

初期条件「$t = 0$ で $v = v_0$，$m = m_0$」より，

$$C = m_0 v_0 \quad \therefore \quad mv = m_0 v_0 - mgt$$

ここで，$m = m_0 - \mu t$ を用いて，

$$v = \frac{m_0}{m}v_0 - gt = \underline{\frac{m_0}{m_0 - \mu t}v_0 - gt}$$

### 7.2

(1)　図 7a のように，紙面に垂直な任意の回転軸 L を $z$ 軸とし，紙面に沿った直交する座標軸 $x, y$ をとる。

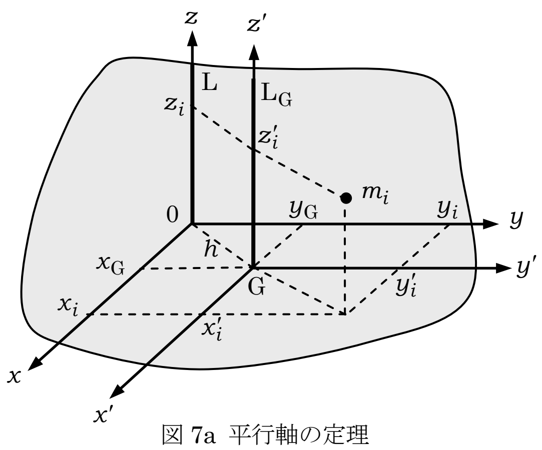

図 7a 平行軸の定理

また，重心 G を原点に，軸に平行な回転軸 $\mathrm{L_G}$ を $z'$ 軸とし，それぞれ $x$ 軸，$y$ 軸に平行に紙面に沿って $x'$ 軸，$y'$ 軸をとる。剛体中の質量 $m_i$ の質点のそれぞれの座標系での位置を $(x_i, y_i, z_i)$，$(x'_i, y'_i, z'_i)$，重心 G の $x-y-z$ 座標系での座標を $(x_\mathrm{G}, y_\mathrm{G}, 0)$ とすると，

$$x_i = x'_i + x_\mathrm{G}, \quad y_i = y'_i + y_\mathrm{G}, \quad z_i = z'_i$$

の関係が成り立つ。これより，回転軸 L のまわりの剛体の慣性モーメント $I$ は，$h^2 = x_\mathrm{G}^2 + y_\mathrm{G}^2$ として，

$$I = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum_i m_i \left[ (x'_i + x_\mathrm{G})^2 + (y'_i + y_\mathrm{G})^2 \right]$$

$$= \sum_i m_i \left[ (x_i'^2 + y_i'^2) + (x_\mathrm{G}^2 + y_\mathrm{G}^2) + 2(x_\mathrm{G} x'_i + y_\mathrm{G} y'_i) \right]$$

$$= \sum_i m_i (x_i'^2 + y_i'^2) + \left( \sum_i m_i \right) h^2 + 2 \left( x_\mathrm{G} \sum_i m_i x'_i + y_\mathrm{G} \sum_i m_i y'_i \right)$$

ここで，$I_\mathrm{G} = \sum_i m_i (x_i'^2 + y_i'^2)$，$M = \sum_i m_i$ とおき，$\sum_i m_i x'_i = 0$，$\sum_i m_i y'_i = 0$ <<(7.4)式参照>>を用いて，(7.37)式を得る。

(2)　図 7b のように，薄い板に沿って直交する $x$ 軸，$y$ 軸をとり，板に垂直に $z$ 軸をとる。板内の質量 $m_i$ の質点の座標を $(x_i, y_i, 0)$ とする。$x$ 軸，$y$ 軸のまわりの慣性モーメントはそれぞれ,

$$I_x = \sum_i m_i y_i^2 \ , \quad I_y = \sum_i m_i x_i^2$$

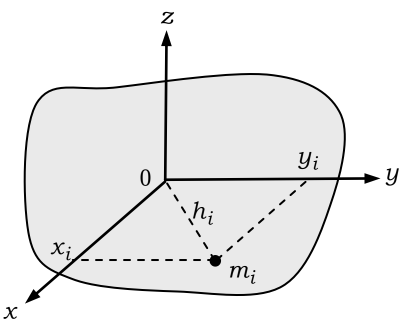

図 7b 直交軸の定理

$z$ 軸のまわりの慣性モーメントは,

$$I_z = \sum_i m_i h_i^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

とかけることから，(7.38)式を得る。

**7.3**

回転軸に垂直な力のモーメントを考えればよい。回転軸に垂直な力 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \cdots, \boldsymbol{F}_i, \cdots$ が剛体に作用し,

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i = 0 \qquad \text{(7a)}$$

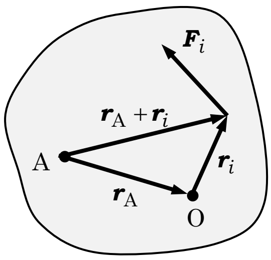

図 7c

とする。図 7c のように，紙面上の点 O を通り，紙面に垂直な回転軸 $\mathrm{L_O}$ のまわりの力のモーメントがゼロであるとする。

$$\sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = 0 \qquad \text{(7b)}$$

次に, 紙面上の点 A を通り，$\mathrm{L_O}$ に平行な回転軸を $\mathrm{L_A}$ とすると，$\mathrm{L_A}$ のまわりの力のモーメント $\boldsymbol{N}_\mathrm{A}$ は，$\overrightarrow{\mathrm{AO}} = \boldsymbol{r}_\mathrm{A}$ として,

$$\boldsymbol{N}_\mathrm{A} = \sum_i (\boldsymbol{r}_\mathrm{A} + \boldsymbol{r}_i) \times \boldsymbol{F}_i = \sum_i \boldsymbol{r}_\mathrm{A} \times \boldsymbol{F}_i + \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i$$

$$= \boldsymbol{r}_{\mathrm{A}} \times \left( \sum_i \boldsymbol{F}_i \right) + \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = 0$$

となる。この結果はベクトル$\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}$によらない。このことから，$\mathrm{L}_{\mathrm{O}}$に平行な任意の回転軸のまわりの力のモーメントはゼロになることがわかる。

**7.4**

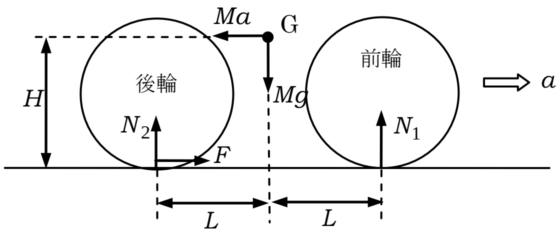


図 7d

図 7d のように，自転車を漕ぐ力は後輪に伝わり，後輪のみに地面から大きさ$F$の静止摩擦力が作用するものとする（両輪に摩擦力がはたらくとしても，その合力の大きさを$F$とすれば同じである）。自転車と乗っている人の合計の質量を$M$とすると，自転車に乗っている人からみれば，重心 G に大きさ$Ma$の慣性力が後方にはたらく。前輪と後輪に作用する垂直抗力の大きさをそれぞれ$N_1, N_2$とすると，人の乗っている自転車のつり合いは，

$$\text{水平方向：} F = Ma\,, \qquad \text{鉛直方向：} N_1 + N_2 = Mg$$

重心 G のまわりの力のモーメントのつり合いは，

$$N_1 L + FH = N_2 L$$

となる。これらより$F$を消去して，

$$N_1 = \frac{M}{2}\left( g - \frac{H}{L} a \right), \quad N_2 = \frac{M}{2}\left( g + \frac{H}{L} a \right)$$

を得る。

ここで，両輪共に浮き上がらない条件より，

$$N_1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \leq \frac{L}{H} g$$

となる。こうして，重心を低くすれば（$H$を小さくすれば），転倒することなく加速度$a$を大きくすることができる。

## 第 8 章

### 8.1

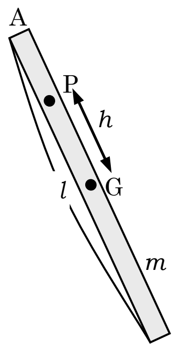

図 8a

棒の質量を $m$ とすると，図 8a のように，重心（中心）G のまわりと端点 A のまわりの慣性モーメントは，例題 7.8 よりそれぞれ

$$I_{\mathrm{G}} = \frac{1}{12} ml^2, \quad I_{\mathrm{A}} = \frac{1}{3} ml^2$$

また，重心 G から距離 $h$ の点 P のまわりの慣性モーメントは，平行軸の定理より，

$$I_{\mathrm{P}} = I_{\mathrm{G}} + mh^2 = \frac{1}{12} m(l^2 + 12h^2)$$

となる。これより，$T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ とおいて，点 A と P のまわりの周期はそれぞれ，(8.8)式より，

$$T_{\mathrm{A}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2/3}{mg \cdot l/2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\, T_0$$

$$T_{\mathrm{P}} = 2\pi\sqrt{\frac{(1/12)m(l^2+12h^2)}{mgh}} = \sqrt{\frac{l^2+12h^2}{12hl}}\, T_0$$

となる。

$f(h) = \dfrac{l^2+12h^2}{12hl} = \dfrac{l}{12h} + \dfrac{h}{l}$ とおいて，$f(h)$ を最小にする $h$ とその最小値を求める。

$$f'(h_{\mathrm{m}}) = \frac{l}{12}\left(-\frac{1}{h_{\mathrm{m}}^2}\right) + \frac{1}{l} = 0 \quad \Rightarrow \quad h_{\mathrm{m}} = \underline{\frac{l}{2\sqrt{3}}}$$

$$f(h_{\mathrm{m}}) = \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

であるから，$T_\mathrm{P} \geq T_\mathrm{m} = 3^{-1/4} T_0$ となる。こうして，

$$\frac{T_\mathrm{m}}{T_\mathrm{A}} = \underline{\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}} \quad \text{（倍）}$$

を得る。

**（参考）**　ここで，「相加平均≥相乗平均」を用いて，

$$f(h) = \frac{l^2 + 12h^2}{12hl} = \frac{1}{12l}\left(\frac{l^2}{h} + 12h\right) \geq \frac{1}{12l} \cdot 2\sqrt{\frac{l^2}{h} \cdot 12h} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

を得る。このとき，重心 G から回転軸までの距離 $h_\mathrm{m}$ は，上式の等号条件より，

$$\frac{l^2}{h_\mathrm{m}} = 12h_\mathrm{m} \quad \therefore \quad h_\mathrm{m} = \underline{\frac{l}{2\sqrt{3}}}$$

## 8.2

図 8b のように，左右の糸の張力をそれぞれ $S_1, S_2$，左の小物体の下降する加速度を $\alpha_1$，右の小物体の上昇する加速度を $\alpha_2$，円板の角速度を $\omega$ とすると，運動方程式は，

左右の小物体の運動：

$$\begin{cases} m\alpha_1 = mg - S_1 \\ m\alpha_2 = S_2 - mg \end{cases} \quad \text{(8a)}$$

２重円板の回転：

$$I\frac{d\omega}{dt} = 2R \cdot S_1 - R \cdot S_2 \quad \text{(8b)}$$

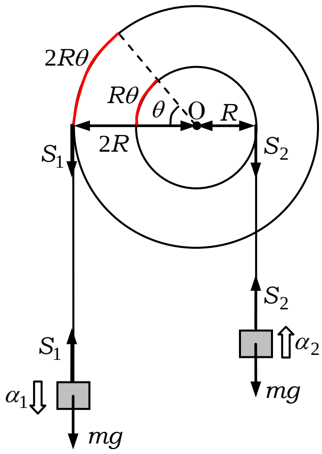

図 8b

円板の回転角を $\theta$ とすると，$\alpha_1 = 2R\ddot{\theta}$，$\alpha_2 = R\ddot{\theta}$ より，

$$\alpha_1 = 2\alpha_2 \quad \text{(8c)}$$

また，$\omega=\dot{\theta}$，$\dfrac{d\omega}{dt}=\ddot{\theta}$ と書けることから，(8b)式に $I=2MR^2$ を代入して，

$$2MR^2\ddot{\theta}=(2S_1-S_2)R \quad \therefore \quad 2M\alpha_2=2S_1-S_2 \tag{8d}$$

(8a)，(8c)，(8d)の 4 つの式から，

$$S_1=\underline{\frac{2M+3m}{2M+5m}mg}\,,\quad S_2=\underline{\frac{2(M+3m)}{2M+5m}mg}$$

$$\alpha_1=\underline{\frac{2m}{2M+5m}g}\,,\quad \alpha_2=\underline{\frac{m}{2M+5m}g}$$

**8.3**

天井における左側の糸の固定点を原点に，水平右向きに $x$ 軸，鉛直下向きに $y$ 軸をとる。糸の切断後，微小時間 $t$ だけたったとき，$\theta$ と $\phi$ は微小角であるから，$\theta$ と $\phi$ の 1 次の項までで重心 G の位置座標は，

$$x=-L\sin\phi+a\cos\theta\approx -L\phi+a$$
$$y=L\cos\phi+a\sin\theta\approx L+a\theta$$

と書ける。左側の糸の張力を $T$ とし，棒の運動方程式は（図 8c），微小量の 1 次の項までで，

$$x\text{ 方向：}\ M\ddot{x}=T\sin\phi \quad \Rightarrow \quad ML\ddot{\phi}=-T\phi \tag{8e}$$

$$y\text{ 方向：}\ M\ddot{y}=Mg-T\cos\phi \quad \Rightarrow \quad Ma\ddot{\theta}=Mg-T \tag{8f}$$

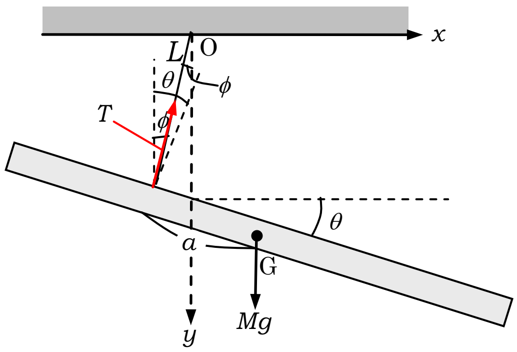


図 8c

重心のまわりの棒の慣性モーメント $I$ は，例題 7.8 より，

$$I = \frac{1}{12}M(2l)^2 = \frac{1}{3}Ml^2$$

となるから，重心のまわりの回転運動方程式は,

$$I\ddot{\theta} = Ta\cos(\theta - \phi) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3}Ml^2\ddot{\theta} = Ta \tag{8g}$$

(8f)，(8g)式より $\ddot{\theta}$ を消去して，

$$T = \frac{l^2}{l^2 + 3a^2}Mg$$

右側の糸を切断するまで，左右の糸の張力は等しく，$T_0 = \dfrac{1}{2}Mg$ である

から，$T = T_0$ より，

$$\underline{a = \frac{l}{\sqrt{3}}}$$

を得る。

(8e)式より，$\omega = \sqrt{\dfrac{T}{ML}}$ として，

$$\phi = A\sin\omega t + B\cos\omega t$$

となる。また，初期条件「$t = 0$ で，$\phi = \dot{\phi} = 0$」より，$A = B = 0 \Leftrightarrow \phi(t) \equiv \underline{0}$

となる。(8f)式に$T = T_0 = \dfrac{1}{2}Mg$を代入して，

$$Ma\ddot{\theta} = \frac{1}{2}Mg \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} = \frac{g}{2a}$$

ここで，初期条件「$t = 0$で，$\theta = \dot{\theta} = 0$」より，$\theta = \underline{\dfrac{g}{4a}t^2}$を得る。