SECTION 5 指数・対数

1 指数・対数計算

ⅰ）指数法則

$m>0$，$n>0$，$a>0$，$a\neq 1$のとき

★ $a^m\times a^n=a^{m+n}$，$(a^n)^m=(a^m)^n=a^{mn}$，$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

派生する公式は

★ $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$，$a^{-1}=\dfrac{1}{a}$，$a^0=1$

ⅱ）対数法則

$M>0$，$N>0$，$b>0$，かつ$a>0$，$a\neq 1$，$b\neq 1$，$c>0$ のとき

★ $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$，$\log_a c=\dfrac{\log_b c}{\log_b a}$

派生する公式は

★ $\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$，$\log_a M^n=n\log_a M$，$\log_a 1=0$

例題 1.25^nの整数部分が2桁になるとき，nの範囲を求めよ。
ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする。

解答 1.25^nの整数部分が2桁だから

$$10\leq 1.25^n<100$$

両辺の常用対数をとって，$\log_{10}10\leq n\log_{10}1.25\leq\log_{10}10^2$

$$1\leq n\log_{10}1.25<2$$

ここで，$\log_{10}1.25=\log_{10}\dfrac{10}{8}=1-3\log_{10}2=0.097$

$$\frac{1}{0.097}\leq n<\frac{2}{0.097}$$

$$10.3\cdots\leq n<20.6\cdots \qquad \therefore\ 11\leq n\leq 20\ \cdots(答)$$

例題 同じ品質のガラス板を10枚重ねて光を透過させたら，光の強さがはじめの $\dfrac{2}{5}$ 倍になった。透過した光の強さをはじめの $\dfrac{1}{8}$ 倍以下にするには，このガラス板を何枚以上重ねればよいか。透過率 r（はじめの光の強さに対する透過後の光の強さの割合）を用いて求めよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする。

解答

$$r^{10}=\frac{2}{5}\quad \therefore\quad r=\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{10}}$$

ガラスを n 枚重ねるとすると

$$r^n=\left\{\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{10}}\right\}^n=\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{n}{10}}\leq\frac{1}{8}$$

両辺の常用対数をとり，$\log_{10}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{\frac{n}{10}}\leq\log_{10}\dfrac{1}{8}$

$$\frac{n}{10}(\log_{10}4-\log_{10}10)\leq\log_{10}1-\log_{10}8$$

$$\frac{n}{10}(2\log_{10}2-1)\leq-3\log_{10}2$$

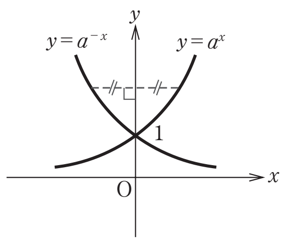
$n\geq22.6\cdots\quad\therefore$ 23枚以上 …(答)

2 指数・対数関数

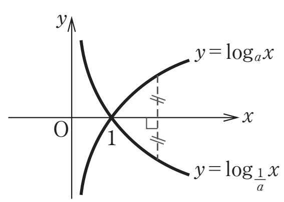
i）指数・対数関数のグラフ

$a>1$ のとき

$$\begin{cases} y=a^x & \Leftarrow \text{増加関数} \\ y=a^{-x}=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x & \Leftarrow \text{減少関数} \end{cases}$$



$$\begin{cases} y=\log_a x & \Leftarrow \text{増加関数} \\ y=\log_{\frac{1}{a}}x=-\log_a x & \Leftarrow \text{減少関数} \end{cases}$$



ii）グラフの対称性

$y=a^x \quad \Leftarrow$ y 軸に関して対称 $\Rightarrow \quad y=a^{-x}=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$

$y=\log_a x \quad \Leftarrow$ x 軸に関して対称 $\Rightarrow \quad y=\log_{\frac{1}{a}}x=-\log_a x$

$y=a^x \quad \Leftarrow$ $y=x$ に関して対称 $\Rightarrow \quad y=\log_a x$

例題 $a>1$ のとき，$a^{2x+1}-a^{x+2}-a^x+a<0$ を解け。

解答

$$a(a^x)^2-a^2a^x-a^x+a<0$$

$a^x=t$ とおくと，$t>0$ であって

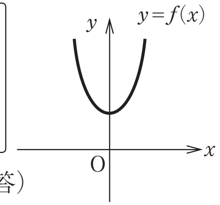
$$at^2-a^2t-t+a=(t-a)(at-1)<0$$

$a>1$ より

$\dfrac{1}{a}<t<a$ だから $\dfrac{1}{a}<a^x<a\qquad\therefore\ -1<x<1$ …(答)

例題 $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$，$g(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ について，

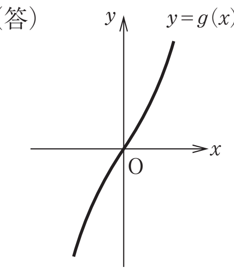
グラフの対称性を調べよ。



解答 $f(-x)=f(x)\qquad\therefore\ y=f(x)$ は y 軸対称 …(答)

$g(-x)=-g(x)\qquad\therefore\ y=g(x)$ は原点対称 …(答)

$y=f(x)$ はカテナリー（懸垂線（けんすいせん））(p.75) という。



例題 $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ の最小値を求めよ。

解答 相加相乗平均の公式より

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(e^x+\frac{1}{e^x}\right)\geq\sqrt{e^x\times\frac{1}{e^x}}=1$$

等号が成立するのは $e^x=\dfrac{1}{e^x}$ のとき $\qquad\therefore\ x=0$

$\therefore$ 最小値$=1$ （$x=0$ のとき）…(答)