第 3 章

連成振動

1，2 章では，おもり（質点）が 1 個の場合の振動について考えてきた．この章では，質点が複数個ある場合を考えていく．複数個の質点がばねなどで結合している系は，弦などの連続体の振動を考えるうえの準備となる．

3.1　2 個のおもりが結合した系

例 3.1　図 3.1 左のように，長さ l〔m〕の糸でつるされた質量 m〔kg〕のおもり 2 個を考える．おもりが 2 個とも静止した位置からのおもり 1, 2 の変位を，それぞれ u_1, u_2〔m〕とおく．ただし，変位 u_1, u_2 は小さく，おもりは図の x 方向にしか運動しないものとする．

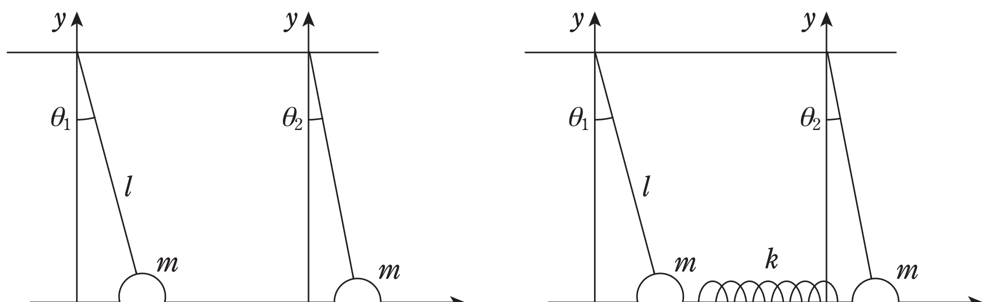

図 3.1　おもり 2 個の振り子（左）とばねでつながれたおもり 2 個の振り子（右）

(1)　おもり 1, 2 が独立しているものとして，u_1, u_2 それぞれに関する x 方向の運動方程式を書こう．

（解）　おもり 1, 2 それぞれの x 座標を x_1, x_2，つりあいの位置での x 座標を $x_1^{(0)}$，$x_2^{(0)}$ とおくと，

$$x_1 = x_1^{(0)} + u_1$$

第 4 章

波動方程式の性質

前章で複数個の質点が連結されている場合に，系全体が連動して，単振動となる連成振動の例を学んだ．この章では，弦などの連続体を伝わる振動に考慮を進めたい．そのために，まず前章からの発展として，質点が無限個ある場合の連成振動と対比させることからはじめることにする．

4.1 無限個のおもりとばねが連結された系

1 本の弦を両端から引っ張った状態にする．この弦を仮想的に間隔 a〔m〕で細かく分け，1 つの小部分は，重心に質量が集中した質点とみなそう．また，細分化された各小部分は，両隣の部分からそれぞれ逆方向に引っ張られてつりあっている状態にあるとみなす．したがって，仮想的に間隔 a で細分化された弦の各小部分全体の系は，間隔 a で並ぶ質点が隣どうし連結されているものにおきかえて考えてもよいだろう．

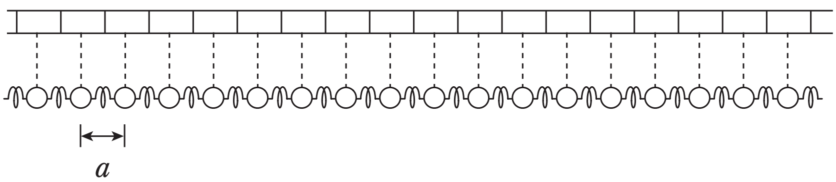

図 4.1　仮想的に間隔 a で細分化された弦のモデル

このとき，弦は一様で，弦全体の質量を m〔kg〕，長さを l〔m〕とおき，単位長さあたりの質量 $\mu = \dfrac{m}{l}$〔kg/m〕は弦のどこでも一定であるとしよう．すると，間隔 a で細分化した小部分の質量は μa と書ける．弦は引っ張ったとき弾力をもってもとに戻ろうとするから，仮想的に小部分に分けたとして，分割した質点はばねで連結されていると考える．そのばね定数を k〔N/m〕とおく．

最終的に 1 本の連続した弦は，多数個の質量 μa の質点を，ばね定数 k のばねで間隔 a で連結した系とおきかえて考えていくことにする.

解く！ 次の (1) (a)，(2) (a) を埋めよう.

◆図 4.2 のように，無限個の質量 m のおもりをばね定数 k のばねで連結した．おもりに番号をふり，$n-1, n, n+1$ 番目のおもりがつりあいの位置からずれている変位をそれぞれ u_{n-1}, u_n, u_{n+1} とおく．ただし，おもりは図の x 方向にしか運動しないものとする.

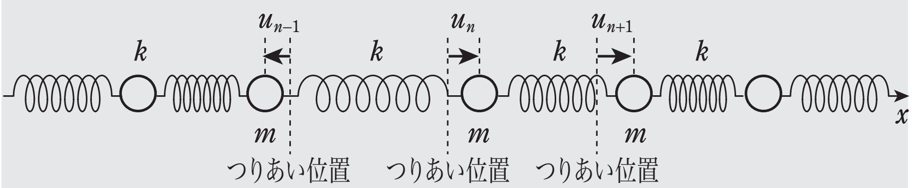

図 4.2　無限個のおもりをばねで連結した系

(1)　おもりを質量 μa の質点とみなして，n 番目のおもりについての運動方程式を立てよう.

(2)　$T' \equiv ka$ とおき，T' と μ を定数とみなして，運動方程式を書きかえよう.

◆

(1)

$$\mu a \frac{\mathrm{d}^2 u_n}{\mathrm{d}t^2} = \boxed{\text{(a)}}$$

(2)

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_n}{\mathrm{d}t^2} = \boxed{\text{(a)}}$$

答え

(1)

(a) $k(u_{n+1} - u_n) - k(u_n - u_{n-1})$

(2)

(a)

$$\frac{T'}{\mu a^2}(u_{n+1} - u_n) - \frac{T'}{\mu a^2}(u_n - u_{n-1})$$

次に，引っ張った弦をはじくときの振動を表すことを考える．ここまで扱ってきたように，おもりの変位がおもりの並んでいる方向と平行であるとすると，う

第5章

波の重ね合わせの原理

この章では，振動・波動で最も重要な考え方である，波の重ね合わせについて扱う．うなりや定在波，干渉や回折など，波に関する問題はほとんどこの重ね合わせの原理に基づいているといっても過言ではない．

5.1 波動方程式の解と波の重ね合わせ

波の重ね合わせの原理を，次の「解く！」で波動方程式から直接確かめてみよう．

解く！ 次の (a) 〜 (c) を埋めよう．

◆ 1本の弦を伝わる波の変位 $y(x, t)$ は波動方程式

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

を満たす．変位 y_1, y_2 がそれぞれ，v が等しい波動方程式の解であるとき，変位の和 $y = y_1 + y_2$ も同じ波動方程式の解であることを確かめよう．◆

1つの波の変位 $y_1(x, t)$ が

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} \tag{5.1}$$

の解であり，もう1つの波の変位 $y_2(x, t)$ が

$$\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} \tag{5.2}$$

の解であるとき，式 (5.1) と式 (5.2) を辺々加えると，

答え