第 0 章

「行列」とはなんだったか

0.1 複素数とは

高校の数学で学んだように，行列とは，大雑把にいえば「数」を並べたものであった．このことを復習するのが本章の目的であるが，まずは「数」自体について復習しておこう．

大学の数学では，高校までのような実数の計算だけでなく，複素数が頻繁に現れる．そこで「複素数」とはなんであったかを確認しておこう．

まず，2 乗すると -1 になる数を考えて，それを**虚数単位**と呼ぶ．虚数単位を表す記号は

$\sqrt{-1}$，i（斜体のアイ），i（立体のアイ），j（斜体のジェー）

など，さまざまな記法が使われている．

以下，本書では，「i（斜体のアイ）」を用いることにする．

電気工学の分野では，電流に「i」を用いるため，虚数単位には「j」が用いられることが多い．これに対し，物理学では電流に「j」，虚数単位に「i」を用いることが多いようである．

この「i」を用いて定められる「$x+iy$（x, y は実数）」という形の数を，**複素数**と呼んだのであった．2 つの複素数 $a+ib$, $c+id$（a, b, c, d は実数）に対する四則（和・差・積・商）は，次のようにして計算することになる．

❖複素数の和❖

$$(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$$

❖複素数の差❖

$$(a+ib)-(c+id)=(a-c)+i(b-d)$$

解く!　例 2.1 にならって次の (a) 〜 (f) 内を埋めよう.

◆行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ の値を計算してみよう. ◆

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$
((1, 1) 成分を 1 にするため, 第 1 行と第 2 行を入れ替えた)

$$= -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{\text{(a)}} & \boxed{\text{(b)}} \\ 0 & \boxed{\text{(c)}} & \boxed{\text{(d)}} \end{vmatrix}$$
(第 2 行 − 2 × 第 1 行, 第 3 行 − 4 × 第 1 行)

$$= -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{\text{(a)}} & \boxed{\text{(b)}} \\ 0 & 0 & \boxed{\text{(e)}} \end{vmatrix}$$
(第 3 行 $-\dfrac{\boxed{\text{(c)}}}{\boxed{\text{(a)}}}$ × 第 2 行)

$$= -1 \times \boxed{\text{(a)}} \times \boxed{\text{(e)}} \quad \text{(性質 10)}$$

$$= \boxed{\text{(f)}}$$

答え

(a) 5
(b) 1
(c) 6
(d) -5
(e) $-\dfrac{31}{5}$
(f) 31

◈練習問題 2.2◈

次の行列式の値を計算せよ.

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 5 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -4 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 1 & i & i \\ -i & 1 & i \\ -i & -i & 1 \end{vmatrix}$　(i は虚数単位)

解
(1) 154
(2) -2

詳解は 132 ページ

◈練習問題 2.3◈

次式が成立することを証明せよ.

解

与えられる．

$$x_1 = \frac{|\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots \boldsymbol{a}_n|}{|\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots \boldsymbol{a}_n|},$$

$$x_2 = \frac{|\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots \boldsymbol{a}_n|}{|\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots \boldsymbol{a}_n|},$$

$$x_n = \frac{|\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots \boldsymbol{p}_n|}{|\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots \boldsymbol{a}_n|}$$

> 次数がある程度大きくなると，成分が具体的な数で与えられた行列に対しては，クラメルの公式によって解を求めるべきではない．それよりも，「はき出し法」を用いたほうが計算量が少なくてすむ．

これを**クラメルの公式**という．

2.4　行列式の応用 2：終結式

2 つの代数方程式が共通の解をもつ条件は，**終結式**といわれる 行列式を用いて求めることができる．これは，コンピュータグラフィックスや CAD ソフトウエア，さらには測量などにも応用されている重要な行列式である．

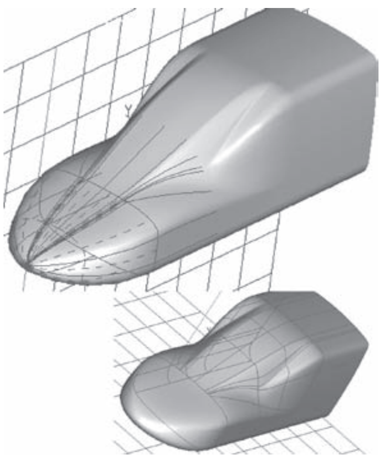

図 2.4　3D CAD の例（図版提供：サイテック株式会社）