高校と
大学をつなぐ
穴埋め式
力学

藤城武彦　北林照幸
Takehiko Fujishiro　*Teruyuki Kitabayashi*

講 談 社

はじめに

近年，大学には多様な学習暦をもつ学生諸君が入学し，理工系の学生であっても，高等学校で数学や物理の学習を充分にする機会がなかった学生も多くなってきています。このような状況の中で，物理および物理を学ぶために最低限必要な数学を，高等学校の内容から順を追って学べる大学初年次レベルの教科書の必要性が年々増しています。高校の物理と大学の物理を“つなぐ”教科書，高校と大学を“橋渡し”する教科書を目指し，学問的な格調の高さよりも，学生諸君が実際に学びやすく役に立つ教科書となるよう心がけ執筆しました。

物理学を学ぶ入門者にとって必要な授業（要素）は，大きく分けて 2 つあると思います。1 つ目は物理が楽しいと直接的に感じられるもの。2 つ目は基礎・基本を 1 つずつ積み重ねることで最終的に物理がわかり，おもしろいと感じられるもの。両者の要素を兼ね備えていることが望ましいですが，本書では後者の要素に力点を置いています。このため，各章の演習問題は多彩であること（いろいろな種類の問題を用意すること）をあえて避け，基礎･基本を繰り返し学習できるように配慮しました。繰り返し学習するには少し“がまん”が必要かもしれませんが，1 つずつコツコツと学習して欲しいと思っています。

本書は高等学校で物理を学習していない学生を念頭において書かれており，丁寧に学習を進めていけば物理を初歩から学び，身につけることができます。また，物理を高等学校で学習した学生にとっても，復習から開始することで大学初年次レベルの物理へ無理なく橋渡しすることができます。学習する項目は一見すると高等学校で学んだことと同じように見えるかもしれませんが，大学で学ぶべき内容も多く含まれています。高等学校では断片的になりがちな物理の学習を，事柄と事柄の関連性やその位置づけなどを再度見直しながら注意深く学習してください。本書では，理工系の学生にとって必要最小限（ミニマム）な事柄を中心に学びます。このため，ミニマム以上の内容の中にはやむなく割愛した事項もあります。より高度な書物などで必要に応じて不足箇所を各自で補ってください。

本書は大学の 90 分の授業で 1 章ずつ学んで行けるように構成されています。本書が授業で使われているようでしたら，授業中の説明や演習を通して 1 章ずつ，1 つずつ学習してください。また，本書の特長の 1 つが“穴埋め式”です。授業を聞きながら，もしくは予習や復習の際に，文章をよく読み自分で“穴埋め”して教科書を完成させてください。なお，本書は授業での活用以外にも，大学の物理を少しだけ先取りしたい高校生，もう 1 度物理を勉強し直したい社会人の方の自学自習用としても活用していただけるのではないかと思っています。本書を通じて物理の基礎が培われることを願っています。

最後に，東海大学理学部物理学科の諸先生方からは，本書を準備するにあたって多くの有益なご助言をいただきました。特に，細部にわたりご意見をいただいた安江正樹教授，遠藤雅守准教授には，この場を借りて心から感謝の意を表します。また，出版を勧め，丁寧な編集をしてくださった講談社サイエンティフィクの横山真吾氏のお力がなければ，本書の執筆は困難でした。横山氏の熱意とご尽力に，心より感謝いたします。

2009 年 11 月

藤城武彦
北林照幸

第 3 章 粒子の速度・加速度

キーワード 変位，速度，加速度

3-1 変位 Basic

物体が位置 x_i から Δx 離れた位置 x_f に移動するとき，物体の位置の変化を❶ [　　　] （変位ベクトル）という。

すなわち，$\Delta\vec{x} \equiv$ ② [　　　] と変位を定義する。変位は物体の移動を表す物理量であるからベクトル量（大きさと向きがある）であり，スカラー量である**距離**とは区別する必要がある。

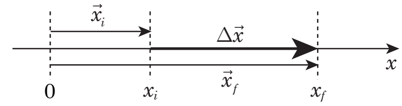

図 3-1　変位・変位ベクトル
変位は物体の位置の変化を表す量であるから，ベクトルである。$\Delta\vec{x} \equiv \vec{x}_f - \vec{x}_i$

記号“Δx”の“Δ”はギリシャ文字 δ の大文字で“デルタ”と読み，物理ではしばしば，変化する量を表す。また，x_i や x_f についている添え字の i と f は，それぞれ運動のはじめ（initial）と終わり（final）を意味する添え字である。

3-2 平均速度と瞬間速度 Basic

物体の運動を表すためには，いつの時刻にどの位置にあるのかを知らなければならない。刻々と位置を変える物体の運動を表そう。

(1) 平均速度

時刻 t_i に位置 $\vec{x}_i$ にある物体が，Δt 後の時刻 t_f に位置 $\vec{x}_f$ に移動するとき，平均速度 $\bar{v}$ は変位（変位ベクトル）を用いて，

$$\bar{v} \equiv \frac{③\ \boxed{}}{④\ \boxed{}} = \frac{⑤\ \boxed{}}{⑥\ \boxed{}}$$

と定義される。これを関数として見直してみると，位置は時間とともに変化するので変位は時間の関数，すなわち $\Delta\vec{x}(t)$ であり，平均速度も時間の関数 $\bar{v}(t)$ となっており，以下のように表せる。

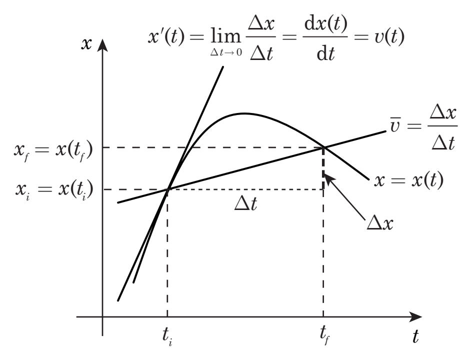

図 3-2　x-t 図
このグラフは横軸に時間 t，縦軸に位置 x をとっていることに注意せよ。すなわち，実際には x 方向に運動している。

$$\vec{v}(t) = \frac{\Delta\vec{x}(t)}{\Delta t} = \frac{\vec{x}(t_f) - \vec{x}(t_i)}{t_f - t_i}$$

さて，ここで，微分の復習をしておこう。

導関数の定義

関数 $y = f(x)$ の導関数を $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ と定義し，記号 $f'(x)$，$\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$，$y'$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ などで表す。$f(x)$ の導関数を求めることを $f(x)$ を x で微分するという。

ここで，極限：$\lim_{x \to a}$（リミットと読む）について簡単に復習する。関数 $f(x)$ において，x の値をある値 a に限りなく近づけることを，その関数の極限をとるといい，$\lim_{x \to a} f(x)$ と書く。関数の極限が限りなく β に近づく，すなわち $\lim_{x \to a} f(x) = \beta$ となるとき，関数 $f(x)$ は $x \to a$ で収束するといい，β を極限値という。

導関数についての補足

関数 $y = f(x)$ において，独立変数 x が $\Delta x \neq 0$ だけ増加したとき，対応する従属変数 y の増加分を Δy とすれば，$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ であるから，平均変化率は

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{(x+\Delta x) - x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

となる。この平均変化率 $\Delta y / \Delta x$ の $\Delta x \to 0$ の極限 $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y / \Delta x$ が導関数もしくは微分となる。微分は任意の点 x での接線の傾き（勾配（こうはい））を表している。

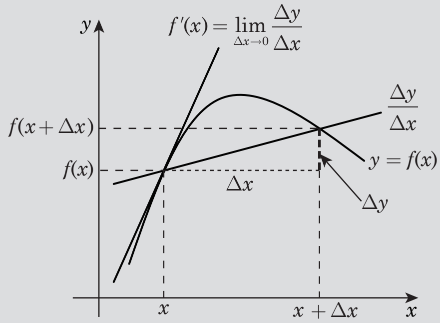

図 3-3　導関数とグラフ

x-t 図（図 3-2）や v-t 図（図 3-4）と比較して，数学で学習した微分が速度や加速度を表すことを確認せよ。

(2)　瞬間速度

ある瞬間の速度を知りたいときには，時間の間隔 Δt を限りなく小さくする ($\Delta t \to 0$) ことによって，瞬間速度を定義できる。すなわち，

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{x}(t+\Delta t) - \vec{x}(t)}{\Delta t} = \frac{⑦\ \boxed{}}{⑧\ \boxed{}}$$

これは，微分の定義にほかならない (☞「導関数の定義」とよく比較せよ)。瞬間速度は，

㉘ $|\vec{a}|\sin\theta$　㉙ $|\vec{a}|\cos\theta\,\vec{i}$　㉚ $|\vec{a}|\sin\theta\,\vec{j}$　㉛ $|\vec{a}|^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$　㉜ $|\vec{a}|^2$　㉝ $\sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2}$

㉞ a_y　㉟ a_x　㊱ $\tan^{-1}\left(\dfrac{a_y}{a_x}\right)$

物体の位置の時間微分で与えられる。通常，この瞬間速度は，特に断らない限り，単に**速度**といい，速度の大きさ $|\vec{v}|$ を❾ $\boxed{\qquad\qquad}$ という。“速度”というときにはベクトル量であり，スカラー量である“速さ”と区別することが重要である。速度および速さは，単位時間あたりの変位であるから，単位は [m/s] である。

微 分 の 計 算

さきに示した導関数の定義にしたがって計算すれば関数を微分できるが，いちいち定義にしたがって計算するのは大変なので，微分の公式を覚えておくとよい。ここでは，もっとも簡単なべき乗の微分を復習しておく（☞指数関数の微分は 104 ページ，三角関数の微分は 162 ページ，他の関数の微分は付録 C)。

$y = f(x) = x^n$ を x で微分する場合，公式：$f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}x} = nx^{n-1}$

たとえば $n = 0$ の場合，$x^0 = 1$ だから $f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}1}{\mathrm{d}x} = 0$ となり，定数を微分すると 0 となる。

$n = 1$ の場合，$f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = 1 \times x^{1-1} = 1$

$n = 2$ の場合，$f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}x} = 2x^{2-1} = 2x$

$n = 3$ の場合，$f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}x} = 3x^{3-1} = 3x^2$

$n = -1$ の場合，$f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}x^{-1}}{\mathrm{d}x} = -1 \times x^{-1-1} = -x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$

$n = 1/2$ の場合，$f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}x^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$　などとなる。

導入 問題 3-1 【関数の値】

次の関数の $t = 3$ での値を求めよ。

(1) $f(t) = 2t^2 - 5t + 2$　(2) $f(t) = \sqrt{3t} + \dfrac{1}{\sqrt{2t^3}}$

導入 問題 3-2 【微分】

次の関数を t で微分せよ。

(1) $f(t) = 3t^4 + 2t^2 - 5t + 2$　(2) $f(t) = \dfrac{2}{t}$　(3) $f(t) = \dfrac{3}{t^2}$　(4) $f(t) = \sqrt{t} + \dfrac{1}{\sqrt{t}}$

基本 問題 3-3 【平均速度と瞬間速度】

ある物体が x 軸に沿って運動しており，その座標は $x = 3t^2 + 2t$ [m] にしたがって変化する。

(1) $t = 1$ s から $t = 3$ s の間の変位 Δx を求めよ。

(2) $t = 1$ s から $t = 3$ s の間の平均速度 $\bar{v}$ を求めよ。

(3) $t = 2$ s における速度（瞬間速度）v を求めよ。

解答

(1)　$t = 1$ s のときの座標は $x_i =$ ⓐ $\boxed{\quad}$ であり，$t = 3$ s のときの座標は $x_f =$ ⓑ $\boxed{\quad}$ であるから，この間の変位は $\Delta x =$ ⓒ $\boxed{\quad}$ m となる。

(2)　この間の平均速度は $\bar{v} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{ⓓ\ \boxed{\quad}}{ⓔ\ \boxed{\quad}} =$ ⓕ $\boxed{\quad}$ m/s

(3)　速度は $v = \dfrac{dx}{dt}$ であるから，$x = 3t^2 + 2t$ を時間 t で微分して，$v = \dfrac{dx}{dt} =$ ⓖ $\boxed{\quad}$ となるから，$t = 2$ s を代入して $v =$ ⓗ $\boxed{\quad}$ m/s

類似 問題 3-4　【平均速度と瞬間速度】

ある物体が x 軸に沿って運動しており，その座標は $x = 2t^2 - 4t$ [m] にしたがって変化する。

(1)　$t = 1$ s から $t = 3$ s の間の変位 Δx を求めよ。

(2)　$t = 1$ s から $t = 3$ s の間の平均速度 $\bar{v}$ を求めよ。

(3)　$t = 2$ s における速度（瞬間速度）v を求めよ。

3-3 平均加速度と瞬間加速度 Basic

「加速度」と聞いて，そのイメージが湧くだろうか？ 「すごい加速だ！」なんて日常でも使うと思うけれど，どういうことだろう。どんどん速くなっていくときに使うね。時間が経ったら速度が変化する，それが加速度。加速度は大変重要だから，よく理解する必要がある。

(1) 平均加速度

時刻 t_i に速度 $\vec{v}_i$ であった物体が，Δt 後の時刻 t_f に速度 $\vec{v}_f$ になったとするとき，平均加速度は

$$\vec{\bar{a}} = \frac{⑩\ \boxed{\quad}}{⑪\ \boxed{\quad}} = \frac{⑫\ \boxed{\quad\quad}}{⑬\ \boxed{\quad\quad}}$$

と定義できる。速度の場合と同様に，これを関数として見直してみると，以下のように表せる。

$$\vec{a}(t) = \frac{\Delta \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t_f) - \vec{v}(t_i)}{t_f - t_i}$$

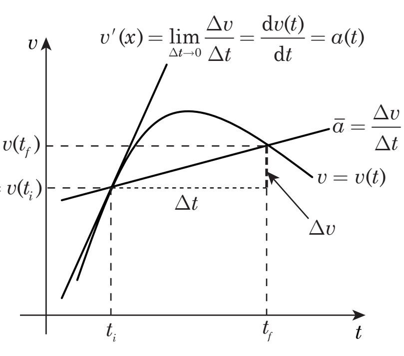

図 3-4　v-t 図

速度の場合と同様に，v-t グラフの傾きが加速度となる。

❶ 変位　② $\vec{x}_f - \vec{x}_i$　③ $\Delta\vec{x}$　④ Δt　⑤ $\vec{x}_f - \vec{x}_i$　⑥ $t_f - t_i$　⑦ $d\vec{x}$　⑧ dt