NEW APPROACH TO CALCULUS, VOLUME 2

新しい微積分 下

［著］
Ryosuke Nagaoka 長岡亮介
Hiroshi Watanabe 渡辺 浩
Shigetoshi Yazaki 矢崎成俊
Kenshi Miyabe 宮部賢志

講談社

Contents | 新しい微積分〈下〉

Chapter 13 実数とは何か

微積分法には，具体的な問題を処理する **計算的側面** と，その計算法が厳密で信頼に足るものであることを一般的に保証する **理論的側面** がある．前章まではおおむね計算的側面をみてきたが，**13 章**以降は理論的側面に目を向ける．

微積分の計算法，たとえば，導関数を用いて 1 変数関数の増減を調べる方法は，平均値の定理（**定理 0.5,** 上巻 22 ページ）によって基礎づけることができる．また 2 変数関数の累次積分において，積分の順序交換は **定理 10.1**（65 ページ）において正当化されている．それでは，**定理 0.5** や**定理 10.1** を証明するにはどうしたらいいだろうか．

このような疑問を追求していくと，2 つの根源的な問題にたどり着く．1 つは「収束するとはどういうことか」という問であり，もう 1 つは「実数とは何か」という問である．この章では，この 2 つの問題について考える．

まず **13.1 節**で「収束」の定義を与え，それに続く節で，定義に基づいて収束を論じるための基礎的な定理を挙げ，それらの定理を証明するために，**13.7 節**で「実数とは何か」という問に答える．

13.1 収束と発散

ガイド

無限級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \tag{13.1}$$

は正の無限大に発散することを示せ．

「私たちは無限そのものを見ることはできません」
「人は結局有限の範囲だけしか見ていないということですね」
「それでは，なぜ “発散する” といえるのでしょうか」

無限級数 (13.1) が発散するとは,

$$L_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} \tag{13.2}$$

で定義される数列 $\{L_n\}$ が $n \to \infty$ で発散するということである (**上巻 0.1.3 節**). それでは,

数列が「発散する」とはどういうことか

数列が「収束する」とはどういうことか

これが **13.1 節**の主題である.

無限級数 (13.1) が発散するという事実は, 次のようにすればみやすい.

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} &= 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{2\text{ 個}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}}_{2^2\text{ 個}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}}_{2^3\text{ 個}} + \cdots \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{2\text{ 個}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{8}}_{2^2\text{ 個}} + \underbrace{\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}}_{2^3\text{ 個}} + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots = \infty\end{aligned}$$

もう少し精密にみてみよう. 部分和 (13.2) において $n = 2^k$ とすれば,

$$\begin{aligned}L_{2^k} &= 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{2\text{ 個}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}}_{2^2\text{ 個}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}}_{2^3\text{ 個}} + \cdots \\ &\quad \cdots + \underbrace{\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}}_{2^{k-1}\text{ 個}} \\ &> 1 + \frac{k}{2}\end{aligned}$$

となる. よって,

$$n \geqq 2^k \quad \Rightarrow \quad L_n > 1 + \frac{k}{2}$$

が成り立つ. このことから L_n が発散する速さ (**上巻 0.5 節**) を知ることができる. 実際, どんなに大きい数 M が与えられても,

$$k \geqq 2(M-1) \tag{13.3}$$

を満たす自然数 k を選び $N = 2^k$ とおけば，

$$n \geqq N \quad \Rightarrow \quad L_n > M$$

が成り立つことが分かる．さらに枝葉を取り去っていえば，次のようになる．

どんな数 M に対しても，ある自然数 N が存在して，

$$n \geqq N \quad \Rightarrow \quad L_n > M$$

が成り立つ．

これは数列 L_n が無限大に発散する状況を端的に表現しているといえる．

上記のいい方にならって，数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束する状況を，次のように表現してみる．

どんな数 $\varepsilon > 0$ に対しても，ある自然数 N が存在して，

$$n \geqq N \quad \Rightarrow \quad |a_n| < \varepsilon$$

が成り立つ．

注意 13.1　数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ の場合，$\varepsilon > 0$ に対して自然数 N を選ぶことは簡単である．すなわち

$$\frac{1}{N} < \varepsilon \tag{13.4}$$

を満たす N をとれば，

$$n \geqq N \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{1}{n} \leqq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

となる．

ここで (13.3), (13.4) を満たす自然数 k, N が存在することは，証明を要しないようにみえる．しかし **13.7 節**において，この事実に改めて注意する．

以上の考察に基づいて，「収束する」ということと「発散する」ということを次のように定義する．

定義 13.1

どんな数 $\varepsilon > 0$ に対しても，ある自然数 N が存在して，

$$n \geqq N \quad \Rightarrow \quad |a_n - \alpha| < \varepsilon \tag{13.5}$$

が成り立つとき，数列 $\{a_n\}$ は α に **収束する** という．

どんな数 M に対しても，ある自然数 N が存在して，

$$n \geqq N \quad \Rightarrow \quad a_n > M \tag{13.6}$$

が成り立つとき，数列 $\{a_n\}$ は **正の無限大に発散する** という．

注意 13.2　収束に関する **定義 13.1** において，正の数 ε と自然数 N が与えられたとき，「(13.5) が成立するか否か決定せよ」という問題は，「yes」か「no」かどちらか一方の答えをもち，紛れがない．それに対し，「収束するとは，限りなく近づくことである」という (直観的に分かりやすい) 表現に留めてしまうと，「収束する」という判断の根拠を問われたときに，答えようがない．それは「収束」の定義が曖昧だからである．**定義 13.1** のような定義法を **εN 論法** という．

問 1　数列 $\left\{\dfrac{2n}{n+1}\right\}$ は 2 に収束することを示せ．

参考 13.3　**定義 13.1** において，(13.5) が成立するような (ε, N) の全体の集合を A とする．

$$A = \{(\varepsilon, N) \mid \varepsilon > 0, N \in \mathbb{N}, (13.5) \text{ が成立する }\}$$

$\mathbb{N}$ は，自然数全体の集合 $\{1, 2, 3, \cdots\}$ である．数列 $\{a_n\}$ の収束についての **定義 13.1** は，集合 A の性質として述べることができる．このように εN 論法を用いると，「点が近づく」という動的な状況を，集合の概念によって静的な事実として表現することができる．

例 13.1　数列

$$a_n = (-1)^n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

はどんな数にも収束しない．

仮に $\{a_n\}$ が α に収束したとすると，どんな数 $\varepsilon > 0$ に対しても，ある自然数 N が存在して，(13.5) が成り立つはずである．しかし，たとえば $\varepsilon = 1$ としてみると (別の正の値でもよい)，自然数 N が存在して，

$$n \geqq N \quad \Rightarrow \quad |a_n - \alpha| < 1$$

が成り立つことになる．特に

$$|a_N - \alpha| < 1\ , \quad |a_{N+1} - \alpha| < 1$$

であるから，

$$2 = |a_N - a_{N+1}| \leqq |a_N - \alpha| + |a_{N+1} - \alpha| < 2$$

という不合理が生じる．よって，数列 $\{(-1)^n\}$ はどんな数にも収束しない．

注意 13.4　「数列 $\{a_n\}$ が α に収束しない」とは，ある数 $\varepsilon > 0$ が存在して，

どんな自然数 N をとっても，(13.5) が成り立たない

ということである．また「(13.5) が成り立たない」とは，

$|a_n - \alpha| \geqq \varepsilon$ となる自然数 $n \geqq N$ が存在する

ということである．

参考 13.5　数列 $\{a_n\}$ が α に収束することを次のように定義した．

任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある自然数 N が存在して，(任意の自然数 n に対し，)

$$n \geqq N \quad \Rightarrow \quad |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つ

これを，**論理記号** を用いて，

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geqq N \quad \Rightarrow \quad |a_n - \alpha| < \varepsilon)$$

のように書くと簡潔である．ただし $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ であり，

「$\forall \varepsilon > 0$」は「任意の $\varepsilon > 0$ に対し」
「$\exists N \in \mathbb{N}$」は「ある自然数 N が存在して」
「$\forall n \in \mathbb{N}$」は「任意の自然数 n に対し」

と読む．

13.2 極限値

ガイド

「数列 $\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$ は 0 に収束することを示してください」
「極限が 0 であることを示すのですね」
「そう言い換えてよいのですが，実はそこにも 1 つ問題があります」
「… どういうことでしょうか」

はさみうちの原理 (**定理 0.2**) (上巻 5 ページ) を用いると，数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ が 0 に収束すること (**13.1 節**) から，数列 $\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$ が 0 に収束することを導くことができる．この節の主題は，収束に関する **定義 13.1** に基づいて，極限値に関する (はさみうちの原理などの) 基本的な性質を示すことである．

注意 13.6　しかし，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ という記号を用いる前に，「数列がある値に収束するなら，それ以外の値には収束しない」ということ (極限の一意性) を確かめておかなければならない．もしも数列 $\{a_n\}$ の収束先が複数あるなら，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ という記号がどの収束先を指すのか分からなくなる．**定義 13.1** において，「点が近づく」という直観を

排除したので，「極限の一意性」という問題が浮上したといえる．

まず「極限の一意性」を次のように定式化する．

定理 13.1

数列 $\{a_n\}$ が α に収束し，かつ β に収束するならば，$\alpha = \beta$ である．

収束に関する **定義 13.1** に基づいて，定理の仮定を言い換える．任意の数 $\varepsilon > 0$ に対してある自然数 N, N' が存在して，

$$n \geqq N \quad \Rightarrow \quad |a_n - \alpha| < \varepsilon$$
$$n \geqq N' \quad \Rightarrow \quad |a_n - \beta| < \varepsilon$$

が成り立つ．そこで N, N' のどちらよりも大きい自然数 n をとる．すると

$$|\alpha - \beta| \leqq |a_n - \alpha| + |a_n - \beta| < 2\varepsilon$$

が成り立つ． ε はどんなに小さい正の数でもいいので， $|\alpha - \beta| = 0$，すなわち $\alpha = \beta$ でなければならない．

問 2　任意の正の数 ε に対して $|x| < \varepsilon$ が成り立つとする．このとき $x = 0$ であることを示せ．

定理 13.1 によって，数列 $\{a_n\}$ が収束するとき，その収束先はただ 1 つに定まることが保証された．そこで，数列 $\{a_n\}$ が α に収束するとき， α を数列 $\{a_n\}$ の **極限値** と呼び，

$$\alpha = \lim_{n \to \infty} a_n$$

と書く．

定理 0.2 (上巻 5 ページ) を用いて，数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ が 0 に収束することから，数列 $\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$ が 0 に収束することを導く． $n = 1, 2, \cdots$ に対して $2^n > n$ であるから，

$$0 < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$$

が成り立つことに注意する．ここで

$$\lim_{n\to\infty} 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

であるから，**定理 0.2** を用いれば，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

が得られる．

問 3 $\dfrac{1}{10^n}$ は $n \to \infty$ のとき 0 に収束することを示せ．

すると問題は **定理 0.2** の証明ということになる．そこで，数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ について，

$$a_n \leqq c_n \leqq b_n \ , \quad n = 1, 2, \cdots$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$$

が成り立つと仮定する．目標は

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$$

を示すことである．

定義 13.1 により，仮定を言い換える．任意の数 $\varepsilon > 0$ に対してある自然数 N, N' が存在して，

$$n \geqq N \quad \Rightarrow \quad |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

$$n \geqq N' \quad \Rightarrow \quad |b_n - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つ．そこで N, N' の大きい方を N'' とすると， $n \geqq N''$ なる n に対し， a_n, b_n は区間 $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ に属するので， c_n も区間 $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ に属する．よって

$$|c_n - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つ．これは c_n が α に収束することを意味する．

同様の方法により，次の定理を示すことができる．

定理 13.2

数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が収束するとき，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$，$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ とすると，以下の各等式の左辺の極限値が存在して右辺に一致する．

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \alpha\beta$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = \frac{1}{\alpha}$$

ただし最後の等式においては，$a_n \neq 0$，$\alpha \neq 0$ であるとする．

定理 0.2 の証明と同じ記号を用いると，$n \geqq N''$ なる n に対し，

$$|(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| \leqq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| < 2\varepsilon$$

が成り立つ．これは数列 $\{a_n + b_n\}$ が $\alpha + \beta$ に収束することを意味する．他の主張についても同様である (**問題 13.5**).

問 4　**定理 13.2** を用いて，定理と同じ仮定のもとで

$$\lim_{n\to\infty} C a_n = C\alpha$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = \frac{\beta}{\alpha}$$

が成り立つことを示せ．ただし C は定数であり，第 2 式においては $a_n \neq 0$，$\alpha \neq 0$ とする．

13.3 単調有界列の原理

ガイド

「εN 論法を使うと，数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ が e に収束することも厳密に証明できるのですか」

数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ の極限を自然対数の底 e と定義した (**上巻 0.2.2 節**).

ここで，たとえば数列

$$a_n = \frac{2n+1}{3n+1} \tag{13.7}$$

は $\frac{2}{3}$ という (よく知っている) 有理数に収束するが，数列

$$e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \tag{13.8}$$

は，いままで知らなかった新しい数 (e) に行き着くことに注意しよう．

さて，数列 $\{e_n\}$ の収束先がまだ分からない状況で，この数列が収束することを示さなければならないのである．そのために，次の **定理 13.3** を用いる．

定理 13.3

(単調有界列の収束)

上に有界な単調増加数列は収束する．すなわち，ある数 M が存在して， $n=1,2,\cdots$ に対して

$$\begin{aligned} a_n &\leqq a_{n+1} \quad &(\text{増加する}) \\ a_n &\leqq M &(\text{上に有界である}) \end{aligned}$$

が成り立つならば，数列 $\{a_n\}$ はある実数に収束する．

この定理の証明は，ここでは行わない．なぜなら，そのためには，「実数とは何か」という問に答えなければならないからである．**定理 13.3** の証明は **13.7 節**で行う．しばらくの間，**定理 13.3** が成立することを認めて，この定理から，さまざまな事実が導かれることをみよう．

定理 13.3 の応用の手始めに，数列

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \tag{13.9}$$

が $n \to \infty$ で収束することを示そう． S_n が単調増加することは明らかである．

$$S_n \leqq S_{n+1}$$

そこで，上に有界であることを示す．

$$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k \geqq 2^{k-1}\ , \quad k = 1, 2, 3, \cdots$$

であるから，

$$\frac{1}{k!} \leqq \frac{1}{2^{k-1}}\ , \quad k = 1, 2, 3, \cdots$$

よって

$$\begin{aligned} S_n &\leqq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \\ &= 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3 \end{aligned} \tag{13.10}$$

となり， $S_n < 3$ が得られる．したがって **定理 13.3** により，数列 $\{S_n\}$ は収束する．

次に，数列 (13.8) について考えよう．便宜のために

$$a_{n,k} = {}_n\mathrm{C}_k \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \cdot 1 \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

とおくと (**問題 1.5**)，

$$e_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}$$

と表せる．ただし， $a_{n,0} = a_{n,1} = 1$ とする．特に $a_{n,k}$ は (k を止めると) n について増加するので， e_n は増加数列であることが分かる．また

$$a_{n,k} \leqq \frac{1}{k!}$$

であるから， (13.10) より，

$$e_n \leqq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = S_n < 3$$

が成り立ち， e_n は上に有界である．よって**定理 13.3** により，数列 $\{e_n\}$ は収束する．

注意 13.7

(1) 数列 $\{e_n\}$ の極限として， e という実数が定義される．このように，「極限」という道具は，数学の新たな存在を作り出すための

方法として，広く応用することができる．

(2) 無限級数 (13.9) の和が e に等しいことが，**参考 1.1** (上巻 40 ページ) で示されている．

問 5 次の無限級数は収束することを示せ．

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$$

ただし，各 a_k は $0, 1, 2, \cdots, 9$ のどれかであるとする．

問 6 **定理 13.3** を用いると，単調減少する数列について，どのようなことがいえるか．

13.4 区間縮小法の原理

ガイド

「$\sqrt{2}$ という数は本当に存在するのでしょうか」

直角二等辺三角形の底辺と斜辺の長さの比が有理比でないことが見出されてから，無理数の概念に到達するまでの長い歴史を一言に縮めると，$\sqrt{2}$ という数は，幾何的な問題を通して人知にもたらされた「新しい数」であるといえる．この数は，直角二等辺三角形の斜辺として容易に作図できるように思われるので，この数が「実在する」ことをあえて疑う気にならないかも知れない．しかし，作図可能性を根拠に $\sqrt{2}$ の存在を主張するには，直角二等辺三角形を平面上に描けることを論理的に保証しなければならないが，そもそも平面だと思っている面が本当に平面かどうかを確かめることは，そう簡単ではない．

$\sqrt{2}$ とは，$x^2 = 2$ を満たす正の実数のことである．このような数は有理数の中には存在しないのだが，実数の中に本当に存在するといえるだろうか．

この問に答えるために，次の定理を用いる．

〈あとがき〉

ニュートンらによって 17 世紀に発見された微積分法は，続く 18 世紀にかけて，偉大ではあるが個別的な問題解決のための壮大な技法の集積と化していた．これを学問的に体系化したのはオイラーである．その後微積分についての規範的な教科書となる彼の『無限解析序説』(1748）は，「解析」という用語を，この新しい学問の名称として普及させ，この新数学を小さい数学専門家集団を超えて共有される《社会知》へと転換する契機となった．とはいえ，オイラーの解析学は，彼の《関数概念》を基礎とするものであり，連続性の概念についても，素朴な理解に留まっていた．いわば「無限大」「無限小」という古典的な用語と，「代数学の普遍性」という当時の哲学に依拠する微積分であった．

19 世紀に入り，コーシーがパリの高等教育機関での自分の講義のための新しい教科書を何冊か書いた．その中でもっとも有名なのは，『解析教程』（1821）である．ここでコーシーは，今日流の《極限概念》を基礎にして，連続，収束，微分，積分をはじめとする微積分の諸概念の厳密な構築に成功した．しかし，実数についての理論を欠いているなど致命的な欠点もあった．

コーシーよりほんの少し前に，フーリエによって熱伝導現象の数学的解明のために発見された《フーリエ級数》(当時は三角級数と呼ばれていた）は，その後解析学の中心的な話題の 1 つとなり，その研究を通じて積分や関数列の収束を巡って多くの繊細な数学的概念の定式化が進行していく．この歴史は，ディリクレ，リーマンという数学界の巨星が演じた役割を通じて華やかに彩られている．そして 19 世紀第 3 四半世紀末，ほぼ同時に，カントル，デデキント，メレらによる，表現は異なるものの数学的にはほぼ同値な《有理数を通じた実数の定義》が提案され，やがて解析学全体を自然数論に還元するワイエルシュトラスの《解析学の数論化》という哲学が生まれる．現代の解析学はほぼこれを基盤としたものであるといってよい．なお今日，世界的な標準となっている《$\varepsilon\delta$ 論法》 を確立したのもワイエルシュトラスである．

このような歴史を背景に，世界では多くの解析学の教科書が書かれてきた．わが国では高木貞治先生による『解析概論』(岩波書店）がいまも世界に誇る

ことのできる名著であり，長きに渡って広く読まれてきている．その後に続く解析学の教科書や講義に，『解析概論』の強い影響があるのはこれが真の名著であったことの必然的な結果である．確かに，『解析概論』は，単に，解析学の基本的な知識の効率よい理解のための洗練された体系的叙述，というだけではまったくない．漢学や数学史についての幅広い学識に基づく高木先生の，高尚にして魅惑的，簡潔にして流麗な文章で，解析学の広大な世界が深い数学的な叡智の調べに乗った《物語り》として展開されているからである．

しかし，残念なことに，現代の大学生には，『解析概論』が「合わない」という．確かに，情報の氾濫する社会に育った若者には，『解析概論』は文体からして反りが合わないのかも知れない．彼らの育った環境，特に学問に目覚めるべき青年期の環境を考えれば無理もない．

まえがきでは書くことを躊躇した我々の不遜な野心をあとがきの気楽さでここに吐露させていただこう．それは，そのような若者の実情を座視してきた大人世代の責任として，『現代の若者のための新しい解析概論』を目指して，微積分学を語ろうとしたということである．まえがきに述べたことをさらに明確に述べれば，次のようになる．

- 厳密な論理の上に構築される解析学の理想を遠くに見据え，しかし，論理的厳密性を金科玉条のごとく振りかざすのではなく，まずは，細かい論理的な証明は後回しにして，その必要性がやがて自然に納得できるように，現代微積分の必須技法の基礎知識を，かつてニュートンやオイラーが発見してきたような素朴な発想で叙述し，
- 一方で，最近の数学教育では等閑視されがちな自然科学，特に物理学と微積分との密接な関係をオイラーやフーリエのように強調し，
- 最後に，コーシーやワイエルシュトラスのように，それまでの歴史で積み残されてきた概念と定理に対し論理的基礎付けを与える

このようなスタイルで，微積分学を１つの《物語り》として，個々の概念や定理の《意味》を理解してもらえるように語ろうと努めたのは，著者たちが『解析概論』を通じて学んだ高木先生の教えを現代風に実践しようとしたからである．本書が，若い人々の間に『解析概論』の愛読者が増えるきっかけとなればこの上なく光栄である．

解析学は，日々発展している数学の中でも，特に広範囲に問題が広がる複雑な世界である．本書では，上下2巻をもってしても，その限られた紙数の中で，読者に伝えたい解析学の基本的話題を限定せざるを得なかったことを釈明しておきたい．意図的に詳しい説明を省いたものや，そもそも触れることさえ断念した話題も数多い．釈明ついでにいえば，そもそも，高木先生の『解析概論』にしてもすべての話題を包括しているわけではない．たとえば，実数の定義が理論的な厳密性にそって詳しく叙述されているものの，中学生でも知っている実数の算法の定義やその規則について詳しい議論を展開しているわけではない．実は，自然数から出発して実数を綿密に構成していくのは，それを経験したことがない人には想像もできないほどタフな作業なのである．

本書を通じて，微積分学との出会いが読者にとって生涯に渡って思い出深いものとなることを心より祈る．

2016年10月

著者を代表して 長 岡 亮 介