NEW APPROACH TO CALCULUS, VOLUME 1

新しい微積分 上

Ryosuke Nagaoka *Hiroshi Watanabe* *Shigetoshi Yazaki* *Kenshi Miyabe*

［著］ 長岡亮介　渡辺 浩　矢崎成俊　宮部賢志

講談社

〈本書を手に取ってくれた大学生のみなさんに〉

本書は，いわゆる理工系の大学生が初年次で習得すべき必須の数学である微積分を，数学で一番大切な《心》が伝わるように現代的なタッチで叙述した新しい微積分読本です．限られた時間で実施される教室での講義を敷衍（ふえん）したり要約したりする従来の書籍と違って，あなたがこれを読むことで，微積分の面白さや難しさ，言い換えると理論的なポイントを把握できるように，それによって，微積分をより深く理解しようという気持ちになれるように，自習支援型という新しいタイプの教科書を目指しました．

本書は，あなたが入学した大学の教室で受ける講義とぴったりと対応するとは限りませんが，講義に出席していながら，そこで何が問題にされているのかさっぱり得心が行かないという，多くの若い学生諸君の悩みに対して，その悩みに寄り添い，やがて納得の喜びへと導く学習のヒントを与えてくれるものでありたい，というのが著者の願いです．本書の最小単位となる章を1つでもしっかり通して読んでいただければ，講義の際に失敗した理解をリカバーし，次の講義にはより能動的に参加することができるようになると期待しています．数学においては，理解を阻む難攻不落の厚い壁を突破するために，急所を把握することが大切ですが，それは根気よく考え続けた末に来るものであること，したがってまた，数学においても読書型の勉強の醍醐味があることを知っていただきたいのです．

次に，本書のもう1つの特徴である演習問題について述べさせてください．微積分に限らず，数学の理解には問題演習が大切です．それは，反復練習による基本の習得が学習の基本であるというだけでなく，試行錯誤を含め自分なりに問題の解を探求し発見するという能動的な体験を通じてこそ，数学的な理解が喜びを伴って深化するからです．

この趣旨から，本書では，従来の微積分の教科書とは少し違って，いろいろな性格の演習問題を，**Basic** **Standard** **Advanced** という3つのグループに分けて用意しました．これらの演習問題は，けっして若い読者に学習の忍耐を教えるための苦役ではありません．むしろ，ともすれば計算 (calculation) に傾きがちな微積分 (calculus) の学習において，納得し理解する喜びと，

能動的・挑戦的な思索の舞台を提供したいと願い，そのために本当に重要な数学的核心を突く問題を精選したつもりです．みなさんの時間の許す範囲で楽しんでください．通常は，**Basic** と **Standard** のレベルを目標にするとよいでしょう．解答に高速に接近しようとするよりも，時間をかけて，より深い理解へと進んでいただければと思います．なお，数学的内容の特質から，演習問題のレベル分けが重要でないと思われる章については演習問題のレベル分けがありません．敢えてレベルを指定するとすれば，他の標準的な章の **Advanced** に相当するものが中心になっています．

本書だけの特徴ではありませんが，数学の本には，記述の順序と簡潔さのために，読者の理解の困難をあえて無視するかのように発展的な記述が登場する箇所がいくつかあります．しかし，本書ではそういう箇所には「後で振り返ればよい」という趣旨の印「♠」がつけてありますので，みなさんの時間と気持ちの余裕に応じて読んでください．数学の勉強はできるだけ早く全体的な姿を把握することが大切ですから，特に初読の際にはそういう箇所を飛ばしても構いません．

本書の執筆は，長岡が企画とサンプルを作り，その基本コンセプトに賛同した渡辺と矢崎が協働してコンセプトを詳細化した全体的な原案を提供し，繰り返し 3 人で原稿を精査・推敲するという協同作業でなされました．途中から宮部が参加し，演習問題とその解答を充実させる仕事を担当しました．

本書を通じて，皆さんの現代数学への最初の一歩が，確かな自信と深い感動に満ちたものとなることを祈っています．

2016 年 10 月

著者を代表して　長岡亮介

〈教員と一般読者のみなさんに〉

現代の微積分の教科書は，大別すると，

- 実数や極限についての厳密な定義から始め，論理的に緻密な体系の組み立てを通じて，応用上重要な定理の厳密な証明へと至るもの（伝統的な本格書であるが，近頃の風潮では謙虚な初学者には“あまりに深遠”，傲慢な初学者には“まるで意味不明”と映ることが避けられない）
- 厳密な理論の緻密な構成には多少目を瞑（つぶ）ってでも，大学で必須の微積分の計算技術・論証技法の修得と応用の理解へと急ぐもの（演習書ないし微積分法の実用書）

の 2 種類である．この他に，ごく近年の国際的な傾向であるが，

> 高校では学ばない数学の話題のうちで，高校の知識の延長上でも，なんとか理解できる主題を上手に選び，論述の運びの工夫で，大学の本格的な数学に読者ができるだけ自然な流れで入っていけるようにしたもの

という，微積分教育の新しい流れを目指すものを見掛けるようになってきた．このような試みは，伝統的規範に代わる新しい規範の提案という挑戦であるから，伝統書と比べるとまだ決定版を得るには至っていないことは止むを得ない．本書もまさにそのような試みの 1 つである．

このような立場に立った書籍を用意しなければならないと奮い立ったのには，いくつかの理由がある．まず第一に，「自ら勉強に向かおうとしない」と批判されることの多い若者たちが，講義や試験に対しては一つ前の世代と比べるとよほど「勤勉」「真面目」であるということである．大学に入る前に身につけてしまった，数学的理解や数学の学習に関する《大きな勘違い》を背負ったまま大学に入学してきて，入学後もその誤解が解けないのであろうか，内容理解を伴わない「問題解法の手順」の形式的な丸暗記に多くの学習時間を費やし，結果として，学生という特権的な身分を与えられながら，大学の数学を理解する絶好の機会から疎外され，数学の魅力の一端にすら触

れずに大学を卒業してしまう人が少なくない．

したがって，高校までに染み付いた数学の学習についての頑固な先入観を克服して貰うために，高校数学との断絶を明確にするとともに，高校数学との継続性にも光を当てて，若い学生諸君の歪んだ数学観からの覚醒と自立を促す必要がある．

ここに本書の第二の動機がある．すなわち，高校数学の微積分法と大学数学の微積分学との断絶の構造的問題である．

現代の微積分のほとんどの教科書には，最初に「極限」の章がある．しかし，高校で学んだ極限の概念は，「限りなく近付く」という表現に象徴されるように運動の直観に依拠してすませているために，極限に関する基本的な定理，たとえば

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \beta \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \alpha + \beta$$

のようなものですら，証明が与えられていない．また，高校数学には，「中間値の定理」や「平均値の定理」のような，高級な定理が登場しているが，その証明は扱われていない．それは，省かれているのではなく，証明する術がない，ということであるのだ．「数学は証明する学問である」と謳うなら，「ただし，数学から微積分は除く」といわなければならないことになってしまう（実は除かなければならないのは，微積分だけではない！）．これらの基本的な定理を厳密に証明するために，極限についての巧妙な論法と実数概念の定義が 19 世紀に確立され，微積分法から発展した解析学は，今日，現代数学の大きな柱の１つになっている．このような現代数学の高みは，数学の最も大きな魅力の１つである．

基礎概念の定義を欠いているという高校数学の決定的な欠点をきちんと克服しようとすれば，基礎概念の定義から再出発しなければならない．しかし，欠点を欠点として自覚していない若い読者に対し，いきなりその克服のための《厳密な論理の刀》を振りかざしても，切り味の鋭さに感動してもらう前に，刃の恐ろしさにおびえさせてしまうだけで終わりかねない．最近の若者はそれぐらい純朴で初々しい．これが今日の我が国の大学教育が直面している事態である．

実は，高校微積分法と大学微積分学の間にある学校数学と現代数学との間の絶対的ともいうべき断絶は， 18 世紀の終わりから 19 世紀末にかけて起

こった数学におけるパラダイム・シフト（考え方の枠組みの革命的な変化）とでもいうべきものであるから，学生諸君がその気になって必死に頑張らない限り，単なる教育上の小さな工夫だけで，乗り越えることのできるものではない．

やや強引な言い方を許してもらえば，現代的な洗練を受ける以前の「古き良き時代」の数学は，多くの点で，「健全」な高校数学の世界に似ている．そこで我々は，現代数学の創世記ともいうべき「古き良き時代」の数学の偉大な先駆者たちに近い感覚で，微積分法の基本となる発想を述べ，その素朴な考えの破綻を明らかにした歴史的な出来事に対応する解説を通じて，論理的困難を克服するために編み出された数学の珠玉のアイデアを紹介するというようなスタイルで，微積分法を発見的に叙述することにした．このような歴史的展開を示すことを通して，現代の読者に，数学史上の大革命の疑似的な追体験をしてもらおうと思ったのである．これは「健全」な世界の中で永年に渡って生きてきた若い読者の素朴な世界観を尊重すると同時に，そのような世界から "解脱" する自発的な努力を，できる限り自然に促すことを目指すものであって，学習者の理解を無視して，論理的に洗練された厳密な叙述で自己満足すること，また，勉強に進んで向かおうとしない現代の若者におもねって，表面的にわかりやすい「丁寧な解説」で現代数学を理解する困難の回避を装うことの，いずれとも対極に位置するものである．

「古き良き時代」の数学が現代の数学教育に示唆するものが，もう１つある．それは，理論と応用が一体になっているということであり，ここに本書の第三の動機がある．ユーザーとして現代数学の諸道具を使いこなしたい人々ばかりでなく，純粋数学の修得を志す理学数物系の学生にとっても，数学を応用する経験は，同じく重要であるに違いない．高校数学的な健全な理解の怪しさと危なさに警告を発しながらも，厳密性・純粋性という偏屈な数学主義に陥らないように最大限の配慮を払って記述を進めるようにしたのは，使いこなすことの重要性への配慮に基づく．本書が，あえて極限や実数の話題から入らず，数学ユーザーにとって最も重要なべき級数から入ったのはその一例である．

「大学生の学力低下」を指摘する声は大きい．本書は，数学系の大学教員がこの事態をどう《変革》するか，という問題に対する１つの回答であり，壮大すぎるであろう夢を実現しようとする冒険である．現状を打開するため

に伝統や既成秩序に囚われない数学教育の変革への共感の輪が広がることを祈る．

「大切なのは，しかし，変革することである．」

謝辞

最後になりますが，カリキュラムに拘束されざるを得ない教育現場との整合性という教科書特有の深刻な問題に関する議論や，本書の性格にふさわしい各種演習問題のあり方についての検討などにおいて，微積分教育に深い関心を寄せる大学の同僚諸兄，とりわけ廣瀬宗光氏，下元数馬氏，小林徹平氏に，また，解答を含む原稿の推敲と膨大な数の図版の作成に関して献身的な協力をいただいた国本学園の山根匡史先生に深く感謝します．数学的核心を的確，適切に表現する魅力的な図版によって，理解しにくい部分を読み進める勇気が奮い起こされるはずです．また，明治大学理工学部で客員講師として講義いただいている早稲田大学の岩尾昌央先生には，格別の感謝を申し上げなければなりません．岩尾先生には，数学と教育の両視点から全体を通して極めて丁寧な査読をいただき，おかげで膨大な数の誤りを未然に防ぐことができたからです．

そして講談社サイエンティフィクの横山真吾氏には，著者が打ち出した新企画の構想の強すぎる個性を読者の立場から練り直す作業に際しての有益なアドバイスをいただきました．のみならず，執筆に必須の LaTeX と印刷の間にいまなお存在する大きな隔たりについての技術的なご支援，そしてまた講義で使用するための試作本の制作に関しても大変お世話になりました．末筆ながら，氏の献身的なご協力に感謝します．

2016 年 10 月

著者を代表して 長岡亮介

Contents | 新しい微積分〈上〉

新しい微積分〈下〉| 目次

Chapter 0 大学の微積分に向かって

高校で学習した微積分の内容を，本書で必要となる範囲でまとめておく．また通常高校の微積分では扱われないが，その自然な延長とみなせる事柄を合わせて取り上げる（**0.4.2 節**，**0.4.3 節**，**0.4.4 節**）．さらに微積分の理論的な側面に目を向け，高校数学の範囲内では解決のつかない問題点をいくつか指摘して，本論に入るための準備とする（**0.6 節**）．

0.1 極限

0.1.1 微積分法と極限

「極限」という言葉は，日常的には「限界」に似た意味をもった用語であるが，読者がすでに知っているように，数学では「限りなく……していく」という (見様によっては「ロマンティックな叙述」を通じて)，特別に重要な意味をもっている．それは，「微分」「積分」をはじめとする微積分法の諸概念が，「極限」の概念を基礎として構築できるからである．だからこそ，「極限」の概念を厳密に定式化することが重要であるが，このことは，本格的には 19 世紀に入ってからの数学の展開の中で明らかになったことである．逆にいえば，微積分の創始者たちであるニュートンやライプニッツはもちろん，この手法を飛躍的に継承・発展させたテイラー，ベルヌーイ一族，そして 18 世紀を華やかに彩り「解析学」の新しい意味を定着させたオイラーも概念の厳密な定式化には無縁であった．

本書では，極限の厳密な扱いは下巻 13 章以降に譲り，ここでは極限の概念について，以下の微積分の標準的な叙述における必須事項をまとめておく．全体像を掴みやすくするために，骨格だけを提示しているが，不明な箇所がある場合には高校数学の教科書を参照するとよいだろう．

0.1.2 数列の極限値

数列 $\{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$ において，n を限りなく大きくしたとき，その項 a_n が限りなくある定数 l に近付いていくならば，「数列 $\{a_n\}$ は定数 l に**収束**する」あるいは「数列 $\{a_n\}$ の**極限値**は l である」という．また，このことを

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l$$

と表す．

注意 0.1　「近付いていく」というとき，単調に近付いていく必要はない．また，定数列 $a_n = l \ (n = 1, 2, \cdots)$ も l に収束するということにする．

数列 $\{a_n\}$ に対し，このような定数 l が存在しないとき，「数列 $\{a_n\}$ は**発散**する」という．特に，n を限りなく大きくしたとき，a_n の値が限りなく大きくなる場合は，$\{a_n\}$ は**正の無限大**に発散するといい，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

と表す．$\{-a_n\}$ が正の無限大に発散するとき，$\{a_n\}$ は**負の無限大**に発散するといい，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

と表す．

0.1.3 無限級数

数列 $\{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$ に対し，その第 n 項までの部分和

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を考える．数列 $\{s_n\} = \{s_1, s_2, s_3, \cdots\}$ が定数 S に収束するとき，**無限級数** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は**和** S **をもつ**といい，

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$$

と表す．このように，無限級数は極限値として，

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

のように定義される．

0.1.4 関数の極限

$x \to \pm\infty$ のときの関数の極限

関数 $f(x)$ において，x を限りなく大きくしたとき，$f(x)$ の値が限りなくある定数 l に近付いていくならば，「$x \to \infty$ のとき，関数 $f(x)$ は定数 l に**収束**する」，あるいは「$x \to \infty$ のときの関数 $f(x)$ の**極限値**は l である」という．また，このことを

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l$$

と表す．$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$ や $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ なども同様に定義される．

$x \to a$ (有限確定値) のときの関数の極限

x の値を，$x \neq a$ という条件のもとで限りなく a に近付けたとき，$f(x)$ の値が限りなくある定数 l に近付いていくならば，「$x \to a$ のとき，関数 $f(x)$ は定数 l に**収束**する」といい，l を関数 $f(x)$ の $x \to a$ のときの**極限値**という．$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ なども同様に定義される．

条件 $x \neq a$ を $x > a$ と変更したときには，関数 $f(x)$ の $x \to a$ のときの**右方極限値**といい，$\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x) = l$ と表す．

条件 $x \neq a$ を $x < a$ と変更したときには，関数 $f(x)$ の $x \to a$ のときの**左方極限値**といい，$\displaystyle\lim_{x\to a-0} f(x) = l$ と表す．

左右の極限値がともに存在して等しいとき，すなわち，$\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x) = l$ かつ $\displaystyle\lim_{x\to a-0} f(x) = l$ であるとき，$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = l$ である．

注意 **0.2**　$x = a$ で $f(x)$ の値が定義されていなくても，$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$ を考えることができる．

0.1.5 関数列の極限

高校数学には明示的には登場しないが関数列の概念は重要である．たとえば，自然数 n に対して関数 $f_n(x) = x^n$ を定義すると，これらの関数を項にもつ列

$$\{f_1(x), f_2(x), f_3(x), \cdots, f_n(x), \cdots\}$$

を考えることができる．このようなものを**関数列**という． $f_n(x) = x^n$ の場合，極限 $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ は， $-1 < x \leqq 1$ の範囲で存在する．また，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は， $-1 < x < 1$ の範囲で，和 $\dfrac{x}{1-x}$ をもつ．

0.1.6 極限値の不等式

数列の極限，関数の極限を論ずる際に，強力な道具となる定理がある．数列の極限の場合には次の定理のように表現できるが，関数の極限についても同様のことがいえる．

定理 0.1

数列 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$ の間に，十分大きな自然数 n については不等式

$$a_n \leqq b_n$$

が成り立つとする．このとき

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n$ と $\lim_{n\to\infty} b_n$ がともに存在するならば，

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leqq \lim_{n\to\infty} b_n$$

である．

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ならば， $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ である．

(3) $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ ならば， $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ である．

注意 0.3　定理の仮定「$a_n \leqq b_n$」を「$a_n < b_n$」に代えても，(1) の結論は「$\lim_{n\to\infty} a_n \leqq \lim_{n\to\infty} b_n$」のままであり，「$\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$」に代えることはできない．

次の定理は実用上大変重要である．

定理 0.2

(はさみうちの原理)

数列 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{x_n\}$ の間に，十分大きな自然数 n については不等式

$$a_n \leqq x_n \leqq b_n$$

が成り立ち，しかも，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ と $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n$ が存在して等しいならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$ も存在して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} x_n$ が成り立つ．

後でみるように，関数についても同様のことがいえる (**定理 0.3**)．

0.2 微分

0.2.1 導関数

関数 $y = f(x)$ のグラフに，点 $(a, f(a))$ で接線を引くことができるとき，接線の傾きは

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

のように極限値として表すことができる．この値を $f'(a)$ と書き，$x = a$ における $f(x)$ の **微分係数** という．また，x の関数 $f'(x)$ を $y = f(x)$ の **導関数** という．$f'(x)$ を $\dfrac{dy}{dx}$ または $\dfrac{d}{dx}f(x)$ のようにも書く．$f(x)$ の導関数を求めることを「$f(x)$ を **微分する**」という．

$f'(x)$ の導関数を $f(x)$ の **2 階導関数**といい，$f''(x)$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$ などと書く．

同様に，$f(x)$ の $\boldsymbol{n}$ **階導関数**を $f^{(n)}(x)$, $\dfrac{d^ny}{dx^n}$, $\dfrac{d^n}{dx^n}f(x)$ などと書く．

問 1　$y = f(x)$ のグラフの点 $(a, f(a))$ における接線の傾きが微分係数 $f'(a)$ で与えられることを，微分係数の定義に基づいて説明せよ．

0.2.2 微分の計算

基本的な関数の導関数は以下の通りである．

$$
\begin{aligned}
&(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (x > 0) \\
&(\sin x)' = \cos x \\
&(\cos x)' = -\sin x \\
&(e^x)' = e^x \\
&(\log x)' = \frac{1}{x}
\end{aligned}
$$

ここで α は任意の定数である．また log は**自然対数**であり，その底 e は極限値

$$
e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n
$$

として定義される．

さらに次のような微分の基本性質を用いると，より複雑な関数を微分することができる．

(1) **微分の線形性**

a, b を実数の定数として，次式が成り立つ．

$$
(af(x) + bg(x))' = af'(x) + bg'(x)
$$

(2) **積と商の微分**

$$
\begin{aligned}
(f(x)g(x))' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\
\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)' &= \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{\{f(x)\}^2}
\end{aligned}
$$

(3) **合成関数の微分**

関数 $y = f(x)$ と $z = g(y)$ を合成した関数 $z = g(f(x))$ について，

$$
\frac{d}{dx} g(f(x)) = g'(f(x))f'(x)
$$

が成り立つ．これを次のように表すこともできる．

$$
\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}
$$

(4) **逆関数の微分**

関数 $y=f(x)$ の逆関数 $x=f^{-1}(y)=g(y)$ について

$$g'(y)=\frac{1}{f'(x)}$$

が成り立つ．これを次のように表すこともできる．

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$$

(5) **媒介変数表示による微分**

媒介変数を用いて表された関数

$$x=u(t)$$
$$y=v(t)$$

について，次式が成り立つ．

$$\frac{dy}{dx}=\frac{v'(t)}{u'(t)}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}$$

問 2　$\sin x, \cos x$ の微分公式と商の微分公式を用いて，$\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ の微分公式

$$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$$

を示せ．

問 3　関数 $f(x)=e^{-x^2}$ の導関数および 2 階導関数を求めよ．

問 4　$\sin x$ の微分公式 $(\sin x)'=\cos x$ を，$(\sin x)'=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ とみることにより，次式を示せ．

$$\frac{d^n}{dx^n}\sin x=\sin\left(x+\frac{n}{2}\pi\right) \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

0.2.3 関数の極値，増減，凹凸

関数 $y=\cos x$ は $-\pi<x<\pi$ の範囲に限ってみると，$x=0$ (だけ) で最

大値をとる．このように，関数 $y=f(x)$ を $x=a$ の近くに限ってみると，「$x=a$ で最大値をとり，a 以外の点では $f(x)<f(a)$ となる」とする．このとき，$f(x)$ は $x=a$ で極大値をとるという．極小値も同様に定義される．$f(x)$ が $x=a$ で極大値または極小値をとるとき，$y=f(x)$ のグラフの点 $(a, f(a))$ における接線の傾き $f'(a)$ は 0 である (**問題 0.7**).

導関数 $f'(x)$ を用いると関数 $f(x)$ の **増減** が分かる．

$f'(x)>0$ となる区間で $f(x)$ は増加し，
$f'(x)<0$ となる区間で $f(x)$ は減少する．

また，2 階導関数 $f''(x)$ を用いるとグラフの **凹凸** が分かる (**問題 0.8**).

$f''(x)>0$ となる区間で $y=f(x)$ のグラフは下に凸であり，
$f''(x)<0$ となる区間で $y=f(x)$ のグラフは上に凸である．

問 5 $f(x)=e^{-x^2}$ とする．曲線 $y=f(x)$ が上に凸であるような x の範囲を求めよ．

0.3 積分

0.3.1 原始関数と不定積分

区間で定義された関数 $f(x)$ に対して，$F'(x)=f(x)$ を満たす関数 $F(x)$ を $f(x)$ の**原始関数**という．すなわち，

$F(x)$ は $f(x)$ の原始関数である $\Leftrightarrow$ $f(x)$ は $F(x)$ の導関数である

$F(x)$ が $f(x)$ の 1 つの原始関数であるとき，他の原始関数は $F(x)+C$ と表せる (**定理 0.6**). C は任意の定数であり，**積分定数**という．また，関数 $f(x)$ の原始関数を一括して $\displaystyle\int f(x)\,dx$ と書いて，$f(x)$ の**不定積分**という．

0.3.2 不定積分の計算

基本的な関数の不定積分は，以下の通りである．

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C \qquad (x>0)$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$$
$$\int e^x\, dx = e^x + C$$
$$\int \frac{1}{x}\, dx = \log x + C \qquad (x > 0)$$

ここで C は積分定数，α は -1 でない定数である．

また **0.2.2 節**に挙げた微分の基本性質から，次のような積分の基本性質が導かれる．これらの性質を用いて，より複雑な関数を積分することができる．

(1) **積分の線形性**

$$\int \bigl(af(x) + bg(x)\bigr)\, dx = a\int f(x)\, dx + b\int g(x)\, dx$$

ここで a, b は任意の定数である．

(2) **部分積分**

$$\int f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\, dx$$

これは積の微分公式に対応する積分公式である．

(3) **置換積分**

x が t の関数であるとき，$x = \varphi(t)$ とすると

$$\int f(\varphi(t))\frac{dx}{dt}\, dt = \int f(x)\, dx$$

が成り立つ．左辺を右辺に変形する方向で使われる場合と，逆方向に使われる場合がある．$f(x)$ の原始関数を $F(x)$ として，上記の公式を

$$\int F'(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt = F(\varphi(t)) + C$$

のように書けば，合成関数の微分公式に対応していることが分かる．

問 6　部分積分法を用いて，$\log x$ の原始関数を求めよ．

0.3.3 定積分

区間 (α, β) で定義された関数 $f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とするとき，

区間 (α, β) に属する 2 点 a, b に対し，$F(b) - F(a)$ を $\int_a^b f(x)\, dx$

と書いて，$f(x)$ の**定積分**という．

原始関数には積分定数の不定性があるが，定積分は積分定数の選び方によらない．

積分の上端 b を x と書き，x を変数とする関数

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt\ , \quad \alpha < x < \beta$$

を考える．このとき $G(x)$ は $f(x)$ の原始関数であり，次式が成り立つ．

$$f(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt$$

この事実を **微分積分学の基本定理** という．

0.3.4 定積分の基本性質

0.3.2 節に挙げた不定積分の基本性質から，定積分の性質が導かれる．すなわち，積分の線形性，部分積分，置換積分は，定積分の性質として成立する．特に置換積分については，関係 $x = \varphi(t)$ のもとで，

$$\int_a^b f(\varphi(t))\frac{dx}{dt}\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx$$

が成り立つ．

これとは別に，次のような定積分に固有の性質がある．

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

a, b, c は $f(x)$ が定義される区間に属する任意の数とする．

問 7　$x = \tan t$ $\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{4}\right)$ と置換することにより，次の等式を示せ．

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{4}$$

0.3.5 定積分と面積

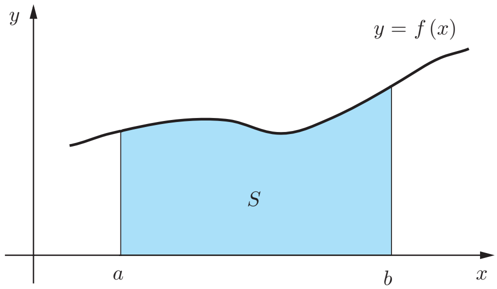
関数 $f(x)$ は，区間 $a \leqq x \leqq b$ でつねに $f(x) \geqq 0$ とする．xy 平面において，曲線

$$y = f(x)\ , \quad a \leqq x \leqq b$$

と x 軸と 2 直線 $x=a$, $x=b$ によって囲まれる部分の面積 S は

$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$

で与えられる (**図 0.1**).



［図 0.1］定積分と面積.

0.3.6 定積分と不等式

関数 $f(x)$ が区間 $a \leqq x \leqq b$ でつねに $f(x) \geqq 0$ であるならば,

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqq 0 \tag{0.1}$$

が成り立つ.

注意 0.4　この事実は，面積と定積分の関係を念頭におけば「明らか」だが， t の関数

$$F(t)=\int_a^t f(x)\,dx\ ,\quad a \leqq t \leqq b$$

の増減を調べることによって，不等式 (0.1) を示すこともできる.

上記の事実から，次のことがいえる．関数 $g(x), h(x)$ が区間 $a \leqq x \leqq b$ でつねに $g(x) \leqq h(x)$ であるならば，次式が成り立つ.

$$\int_a^b g(x)\,dx \leqq \int_a^b h(x)\,dx \tag{0.2}$$

問 8　関数 $f(x)=h(x)-g(x)$ を考えることにより，不等式 (0.2) を示せ.

Chapter 0 章末問題

Basic

問題 0.1　関数 $y = x^x$ を微分したい．x^x を e の $\boxed{}$ 乗と変形して微分すると，$y' = \boxed{}$ となる．また，$y = x^{\sin x}$ についても，$x^{\sin x}$ を e の $\boxed{}$ 乗と変形して微分すると，$y' = \boxed{}$ となる．

問題 0.2　0 または正の値をとる連続関数 $f(x)$ と定数 $a > 0$ に対して，3 直線 $x = 0,\ y = 0,\ x = a$ および曲線 $y = f(x)$ で囲まれた領域の面積を $F(a)$ とする．$F(a)$ は f と積分記号 $\int$ を用いて $\boxed{}$ と表せるので，$F'(a) = f(a)$ となる．このことを次のように説明してみよう．$F'(a)$ は微分の定義により F と $\lim$ を用いて $\boxed{}$ と表せる．$x = a,\ y = 0,\ x = a + h,\ y = f(x)$ で囲まれた領域の面積は，F を用いて $\boxed{}$ と表せるので，それを h で割った値は，底辺を h として面積が同じとなるような長方形の $\boxed{}$ に一致する．$f(x)$ は連続であるから，$h \to +0$ のとき，その値は $\boxed{}$ に近づく．

問題 0.3　$\sin\theta = -\dfrac{1}{2}$ となるような θ を $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で探すと $\boxed{}$ となる．この値を $\arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ と書く．$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となるような θ を $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で探すと $\boxed{}$ となる．この値を $\arccos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ と書く．$\tan\theta = -1$ となるような θ を $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で探すと $\boxed{}$ となる．この値を $\arctan(-1)$ と書く．

Standard

問題 0.4　極限値に関する関係式

$$\lim_{x \to +0} x \log x = 0$$

を，$x = \dfrac{1}{t}$ と置換する方法および $x = e^{-t}$ と置換する方法によって示せ．

問題 0.5

(1) 等式 $2\cos x \cos y = \cos(x - y) + \cos(x + y)$ の両辺を x で微分して，三角関数の積 $\sin x \cos y$ を和に直せ．

(2) (1) で得られた等式の両辺を y で微分して，三角関数の積 $\sin x \sin y$ を

和に直せ．

問題 0.6

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ を $x = \sin\theta \quad \left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ と置換することで求めよ．

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ を $x = \sinh t$ と置換することで求めよ．

(3) $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}dx$ を $x = \sinh t$ と置換することで求めよ．

(4) $\displaystyle\int \sqrt{x^2-1}dx$ を $x = \cosh t \quad (t > 0)$ と置換することで求めよ．

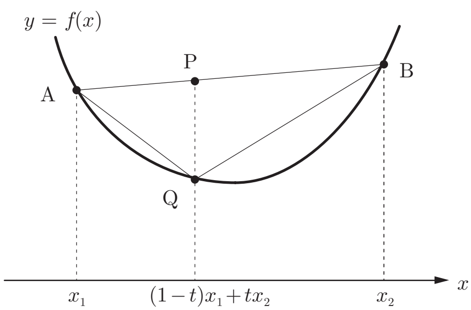
Advanced

問題 0.7　関数 $f(x)$ が $x = a$ の近くで微分可能であり，$x = a$ で極大値をとるならば，$f'(a) = 0$ であることを示せ．

問題 0.8　区間 I 上の連続関数 $f(x)$ が，任意の $x_1, x_2 \in I$ に対し，

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leqq (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \qquad (0 \leqq t \leqq 1) \tag{0.18}$$

を満たすとき，f は I で **凸関数** であるという (**図 0.8**)．以下の事実を示せ．



［図 0.8］凸関数のグラフ．

(1) $f(x)$ が I で凸関数であるための必要十分条件は，$x_1 < u < x_2$ を満たす $x_1, u, x_2 \in I$ に対して，

$$\frac{f(u)-f(x_1)}{u-x_1} \leqq \frac{f(x_2)-f(u)}{x_2-u}$$

が成り立つことである.

(2) $f(x)$ が I で微分可能であるとする．このとき，$f(x)$ が I で凸関数であるための必要十分条件は，$x_1 < x_2$ を満たす $x_1, x_2 \in I$ に対して，

$$f'(x_1) \leqq f'(x_2)$$

が成り立つことである.

(3) $f(x)$ が I で 2 階微分可能であるとする．このとき，$f(x)$ が I で凸関数であるための必要十分条件は，任意の $x \in I$ に対して，

$$f''(x) \geqq 0$$

が成り立つことである.

問題 0.9　(マチンの公式)

(1) $\tan\alpha = \dfrac{1}{5}$ とおくとき，

$$\tan\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{239}$$

が成り立つことをを示せ.

(2) 上記の結果を用いて，

$$4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$$

を示せ.