定義 5.12（コンパクト性）　$A \subset X$ が**コンパクト**であるとは，A の任意の開被覆 $\{U_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ に対して，有限個からなる部分被覆 $U_{\alpha_1}, \cdots, U_{\alpha_n}$，すなわち，$A \subset U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} \cup \cdots \cup U_{\alpha_n}$，$\alpha_i \in \Lambda$ が必ず存在することである．

問題 5.12　コンパクト集合 B の中の閉集合 $A \subset B$ はコンパクトであることを示せ．

考え方

閉集合の補集合は開集合である．考える A の開被覆に開集合 A^c を加えて，B の開被覆をつくる．そして，B のコンパクト性を用いる．

解

X を位相空間とし，$A \subset B \subset X$，B : コンパクト，A : 閉集合 とする．$\{U_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ を A の任意の開被覆とする．$\{U_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\} \cup \{A^c\}$ を考えると，これは B の開被覆になる．なぜなら A^c は A : 閉集合より開集合．$x \in B$ とすると $x \in A$ または $x \in B - A$．$x \in A$ なら x はある U_α に含まれるし，$x \in B - A$ なら x は A^c に含まれる．よって $B \subset \left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha\right) \cup A^c$．$B$ はコンパクトだから

$$\exists \alpha_1, \cdots, \alpha_k \in \Lambda : B \subset U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} \cup \cdots \cup U_{\alpha_k} \cup A^c.$$

最後の A^c は不要かもしれないが，その場合でも A^c をさらに加えているのだから $\subset$ は当然成り立つ．$A \subset B$ かつ $A \cap A^c = \emptyset$ だから $A \subset U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} \cup \cdots \cup U_{\alpha_k}$ が成り立ち，A は $\{U_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ の中の有限個で覆えた．よって A はコンパクト．

□

問題 5.13　ハウスドルフ空間の中のコンパクト集合は閉集合であることを示せ．

考え方

「A : 閉集合 $\Longleftrightarrow$ A^c : 開集合 $\Longleftrightarrow$ $\forall x \in A^c, \exists U : x$ の近傍, $U \subset A^c$」を導けばよい．

$x \in A^c$ と $y \in A$ をとる．X : ハウスドルフ空間，$x \neq y$ より x を含む開集合 U_y と y を含む開集合 V_y が存在して，$U_y \cap V_y = \emptyset$ となる（x でなく y を動かすので，x を含む開集合も y によって決まる．記号のつけ方に注意）．A の開被覆として $\{V_y \mid y \in A\}$ をとると，A : コンパクトより，$\exists y_1, \cdots, y_k$: $A \subset V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_k}$．$U = U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_k}$ とする．各 U_{y_i} は開集合なので U も開集合で $U \cap A = \emptyset$ も成り立つ．

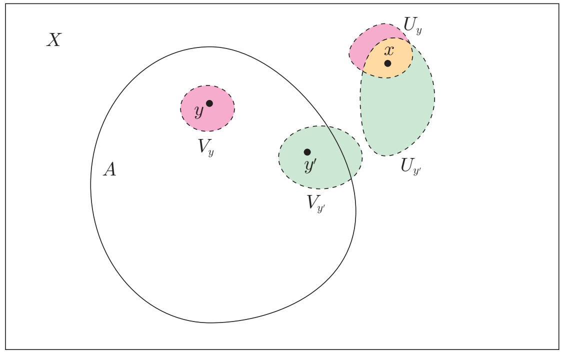

図 5.3　コンパクトは閉

解

X : ハウスドルフ空間，$A \subset X$: コンパクトとする．A^c が開集合であることを示す．

$x \in A^c$ を固定して $y \in A$ とする．X : ハウスドルフ空間より $\exists U_y, \exists V_y$: それぞれ，x, y を含む開集合，$U_y \cap V_y = \emptyset$．$\{V_y \mid y \in A\}$ は A の開被覆だから，A : コンパクトより，$\exists y_1, y_2, \cdots, y_k \in A$: $A \subset V_{y_1} \cup V_{y_2} \cup \cdots \cup V_{y_k}$．$U = U_{y_1} \cap U_{y_2} \cap \cdots \cap U_{y_k}$ とすれば U は x を含む開集合．