まえがき

単位が取れる線形代数ノート，そんなタイトルの本を見て，諸君はどんな内容をイメージするだろうか。しかも書いているのが予備校の講師である。これは結構笑える組み合わせかもしれない。単純に考えれば，予備校講師が書く演習書なんて，頻出問題の解法を反復練習させて暗記させる問題集なんじゃないの？というところなのだろうが（いや，実際それもまた大事だったりするのだが），読んでもらえればわかる通り，そういう風には仕上げなかった。なぜなら，「それじゃおもしろくない」からである。

意味もわからずに，とりあえず使い方だけ丸暗記しようったって，そんなのつまらないに決まっている。つまらなけりゃやる気だってでない。逆にわかれば絶対おもしろいし，おもしろけりゃやる気だってでるし，やる気を出して勉強すりゃあ結果だって暗に明についてくるってもんだ。ましてや線形代数学ときたら，微分積分学と並んで現代人の教養として必修の基礎知識である。多少の理論的枠組みくらい理解できてなくてどうする，ということもある。

本書の読者のほとんどは数学を道具として使う人々だと思う。道具は道具の使い方さえわかればそれでいいじゃないかという意見もあるだろうが，どんな道具でも本当に使いこなすには，ある程度道具そのものを知っていなければならないというのが私の持論である。また，将来理系のプロフェッショナルとしてやっていってもらいたいからこそ，付け焼き刃な学習もどきで終わってほしくないという一念で，私なりの線形代数の理念の解釈を，各項目で深入りしすぎない程度に触れておいた。だからなるべく「読んで納得」できるように，説明のわかりやすさにはそれなりの工夫をしてみたつもりだ。

私は予備校の教壇に立たせてもらえるようになって，もうかれこれ15年以上になる。扱うのは確かにほとんどが大学入試問題ではあるけれど，それらを通じて数学を，大学を，そして日本の高等教育のこれからの有り様を見つめ続けてきた。「受験がすべての元凶」であり，「入試問題なんか意味がない」という言説は，はっきりいってステレオタイプで平板なものの見方でしかない。受験数学なんていう特別な技術などはなく，そこにあるのはただの数学の問題であり，その背景にある数学に違いは少しもない。違うのは教える側の心構えであり，学ぶ者の意識のもちようなのだ。そして私自身，教壇の上から学生諸君が修得するべき種々の数学的能力について考え，話し続けてきたつもりである。

受験生に最も近い立場の人間として，せっかく頑張って受験勉強してきたものをそのままうまく大学での学習にシフトできるよう，何が足りなくて何を補わなければならないかを考え，そして単なる試験対策演習書で終わらせないよう十分に気を配ってきちんと解説を書いた。とはいえ，諸君が講義で指定される教科書と変わらないのでは意味がない。難解で杓子定規な定義や定理の証明など，省くべきと思ったところは思い切って省いてある。こういうことができるのも，肩書きも履歴も，学会もつきあいも関係ない，中身だけで勝負ができる予備校講師の特権かもしれない。

学習参考書や受験参考書をこれまでにも様々に手がけてはきたが，大学生向けの演習書となると今回がはじめてである。果たしてすべての迷える大学1年生諸君の福音となり得るかどうか，若干心配な面もなきにしもあらずだが，すべての人を満足させるようなものなどこの世に存在しないということも，予備校の授業アンケートでさんざん経験し理解している。本書を通じての読者諸君と私との巡り会いがハズレでないことを切に祈るのみである。ただ，当方としては最善を尽くし，現時点ではそれなりに高水準のものができたのではないかと自負している。

2003年4月

齋藤寛靖

目次

単位が取れる**線形代数ノート**
CONTENTS

ブックデザイン——安田あたる

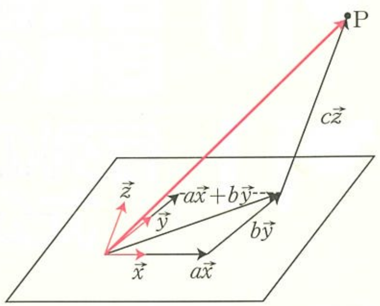
講義 LECTURE

00 Introduction

高校で学んだベクトルは，あくまで平面上や空間内の「矢印」ベクトルであって，実際に目に見える動きを表すものだった。ちょっとでも物理を勉強した人だったら，この世のあらゆる物体に働く様々な作用が，方向と大きさをもつ量として，ベクトルを通じて語られていくことを知っていると思う。だから，高校でいう平面ベクトルや空間ベクトルについて学ぶことは，それなりに重要だということはすぐに納得できるだろう。ところが，大学で学ぶ線形代数になると，いきなり「n 次元」とくる。しかもでてくる行列も $m\times n$ だ。やたらと複雑な上，なんに使われるのかもさっぱりわからない。行列ってなんだろう。線形代数ってどんなことに役に立つんだろう。その問いに簡単に答えることはそう楽なことではないけれど，講義をはじめるにあたって，それなりのことをお話ししておこうと思う。少々難しい内容になるかもしれないが，つきあってほしい。

●集合の中に「構造」をいれる ——ベクトル空間という考え方——

まず最初に考えなくてはならないことは，ベクトルというのは何も「矢印」だけを指すのではないということである。だから，$\vec{x}$ や $\vec{y}$ をあえて矢印つきで表さず，$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ と太い文字で表してみよう。こうすれば，ベクトルを平面や空間の中の移動などに限定しない活用が見えてくるのだ。



たとえば3次元空間の中の任意の点Pについて，

$$\vec{p}=a\vec{x}+b\vec{y}+c\vec{z}$$

と書かれているところを

$$\boldsymbol{p}=a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y}+c\boldsymbol{z}$$

と表してみよう。

高校でも学んだことと思うが，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ が1次独立なら，空間内の $\boldsymbol{p}$ で表される点Pの位置は，この式の中の (a, b, c) の組み合わせをいろいろと換えることで表すことができるわけだ。では，こういう形をしているものは他にないだろうか。実は結構たくさんある。たとえば，2次以下の多項式なんていうのもそうだ。

2次以下のどんな多項式

$$p(x)=ax^2+bx+c$$

も，(a, b, c) を様々に組み合わせることでいろいろ作り出せる。だから，お互いに独立した存在である $x^2, x, 1$ を，それぞれ

$$e_1(x)=x^2,\quad e_2(x)=x,\quad e_3(x)=1$$

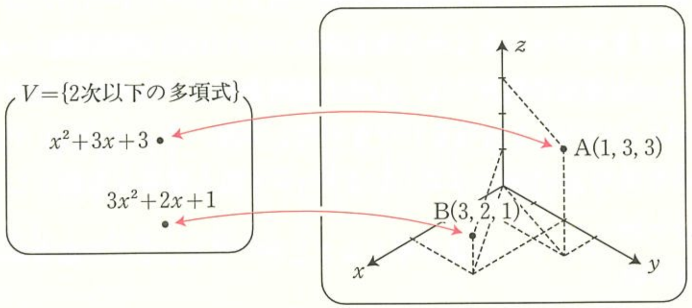
と表すことにすれば，

$$p(x)=ae_1(x)+be_2(x)+ce_3(x)$$

ということになる。これは先ほどの

$$\boldsymbol{p}=a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y}+c\boldsymbol{z}$$

と全く同じ形になるではないか。だから，この $p(x)$ を $\boldsymbol{p}$ と結びつけて，$e_1(x)$, $e_2(x)$, $e_3(x)$ を $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ と対応づけることにすれば，あらゆる2次以下の多項式 $p(x)=ax^2+bx+c$ は，$\boldsymbol{p}=a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y}+c\boldsymbol{z}$ と対応づけられる。つまり，3次元空間のベクトル1つ1つと座標 (a, b, c) を仲立ちと



してつながりあうのである。このことから2次以下の多項式全体の集合は，$x^2, x, 1$ を座標軸として3次元ベクトル空間の構造をもっているといえてしまうのである。

すなわち，ただの集合としか考えていなかった2次以下の多項式全体という集合の中に，3次元空間としての座標軸 $e_1(x)$，$e_2(x)$，$e_3(x)$ が取れる。そして，そこに含まれる1つ1つの多項式 $p(x)=ax^2+bx+c$ は，この座標軸にしたがって，1つの点 $(a,\ b,\ c)$ として認識することができるのだ。さらに，この集合から2つの要素 $f(x)$，$g(x)$ を取り出して

$$\langle f(x) \mid g(x) \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

と定めてやれば，なんとこれを内積として考えることもできてしまうのである。

このようにして，種々の抽象的な集合も，ベクトルという構造があることがわかれば，そこに我々にとって直観的に理解しやすい幾何的な性質を見出すことができるので，それを様々な問題の解決に応用できるのである。また，ここでは2次以下の多項式を例に話をしたが，その次数を3次以下，4次以下と上げていくにしたがって，ベクトル空間の次元も4次元，5次元と上げていけばよいわけで，ベクトル空間の構造を平面や3次元空間に限らず4次元，5次元と拡張していけば，このような多項式の集合や，さらにはより広範な種々の集合への応用が期待できる。

●行列による写像とその利用

そのようなベクトル空間で，最も単純な写像はなんだろうということになれば，それは行列による線形変換である。我々がいちばんはじめに学ぶ関数はなんだったろうかと考えると，それは正比例関係 $y=ax$ だったはずだ。n 次元空間上では，この正比例に相当するのが行列 A を用いた $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$ ということになるわけなのだ。実際，たとえば xy 平面上の点 $(x,\ y)$ を他の xy 平面上の点 $(X,\ Y)$ へ写す最も簡単な写像としては，

$\begin{cases} X=ax+by \\ Y=cx+dy \end{cases}$ という1次式を考えることができる。この写像自体の特性を調べるならば，それを規定している4つの数 a, b, c, d の組み合わせ関係が標的となることがわかるだろう。

そこで，この4つの数の組み合わせ関係を $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と抜き書きしてやることにするのである。これこそが行列の考え方の第一歩となるのだ。

$$\begin{cases} X=ax+by \\ Y=cx+dy \end{cases} \iff \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

このいわば n 次元空間の1次関数とでもいうべき線形変換は，とても応用範囲が広い。

ちょっと想像してもらえればわかると思うが，たとえば微分1つ取ってみても，1次関数への近似という側面がある。だから n 次元空間上の写像の微分も「1次関数＝線形変換への近似」という側面があるのだ。ゆえに解析学にだって行列が密接に関わってくる。n 変数関数の重積分での変数変換では，ヤコビアンなんていう行列式を使っている。行列の基礎的な計算のテクニックはもちろんだけど，線形変換の基礎理論だって多少は知っておく必要があるのだ。

こんな応用方法もある。たとえば，

$$13x^2+6\sqrt{3}\,xy+7y^2=16 \quad \cdots\cdots①$$

で表される曲線がなんなのかを考えてみよう。はっきりいってこのままじゃちんぷんかんぷんだ。そこで，この曲線を乗せている xy 平面全体に，

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots\circledast$$

なんていう線形変換をかけてすっ飛ばしてみよう。そうすると……。

あとで述べる逆行列の知識を借りれば，この変換の逆変換は，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} X+\sqrt{3}\,Y \\ -\sqrt{3}\,X+Y \end{pmatrix}$$

となるから，これを①へ代入して，

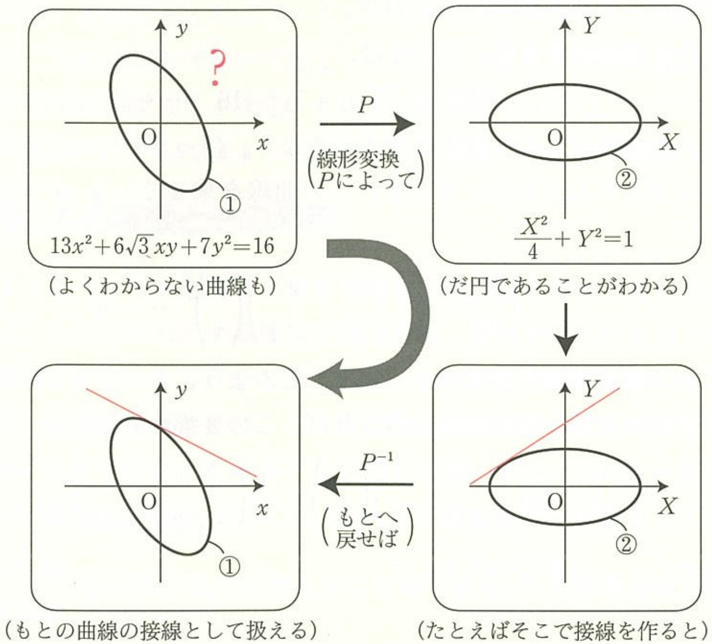
$$13\left(\frac{X+\sqrt{3}\,Y}{2}\right)^2+6\sqrt{3}\left(\frac{X+\sqrt{3}\,Y}{2}\right)\left(\frac{-\sqrt{3}X+Y}{2}\right)$$
$$+7\left(\frac{-\sqrt{3}\,X+Y}{2}\right)^2=16$$
$$\Longleftrightarrow \frac{X^2}{4}+Y^2=1 \quad \cdots\cdots②$$

を得る。これならよくわかる図形だろう。そう，だ円なのだ。

実は線形変換㊟は「$\frac{\pi}{3}$の回転変換」であって，なんと図形①は$\frac{\pi}{3}$回転するとただのだ円②となってしまうのだ。

もちろん，だ円は回転したってだ円だから，図形①自体がはじめからだ円だったということがわかる。

だから，もし①に関わる図形的な性質(接線だとか最大，最小に関わる問題など)を調べたいと思ったら，まずは回転変換㊟を用いてわかりやすい②で考えて，そのあと㊟の逆変換を施して，もとのフィールドで①の性質として語り直せばよい。



このような発想はよく用いられる。この考え方は2次形式における対称行列の対角化と呼ばれる手法だ(講義11で扱う)。またこれは2変数関数の極大値や極小値を吟味するときに登場するヘッシアンという行列式の考え方のもとになる話でもある。そしてふつうの対角化を考える(講義11で扱う)なら，線形連立微分方程式などにも応用されていったりする。いずれも理工系学生なら必修の理論なのだ。

●それではいよいよ本論に入りましょうか

とまあそんなわけで，ほんの数例のみを取り上げてみたが，線形代数学という分野は本当に様々な場面に登場してくるので，今後各自各方面へと勉強を進めていくにつれて驚かされることが多くなっていくことだろう。

そりゃまあ先にも述べた通り，線形変換はn次元空間内の1次関数なんだから，様々な現象を考察する上でいちばん最初にくる考え方として当然なわけだ。

特にコンピュータシミュレーションが発達してきた現代では，「何万ものステップに細切れにしてチクチクずらして積み重ねる」なんていう計算も日常的だから，微分・積分とミックスして行列による線形変換の思想はますます重要視されてきているといっても過言ではない。

行列やベクトルの計算は最初のうちは意味もなかなか理解できず，退屈で苦しいものかもしれない。だけどここでの苦労が後々いろいろ効いてくるはずだから，将来を信じて踏ん張ってほしい。張り切って講義1からの本文へと取りかかっていってもらいたい。

それではいよいよ本論へと入っていくことにしよう。

講義 LECTURE

01 行列の計算

● m 行 n 列の行列を考える

まずはこれから学ぶ行列の基本的な性質について少し考えてみることにしよう。ここを読めば「行列ってなんだ？」っていうことがわかってくると思う。

講義0で述べたように，連立方程式

$$\begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{cases} \quad \cdots\cdots ※$$

の性質を決定づける要素として4つの係数を取り出したモノ

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

について考えるとしよう。連立方程式は他にもいろいろ考えることができて，

$$\begin{cases} ax+by+cz=p \\ dx+ey+fz=q \end{cases} \quad \text{から} \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} p_1x+q_1y=r_1 \\ p_2x+q_2y=r_2 \\ p_3x+q_3y=r_3 \end{cases} \quad \text{から} \quad \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \\ p_3 & q_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x+3y \quad\;\; =1 \\ \quad\; -2y+z=2 \\ 5x+\;\; y-z=3 \end{cases} \quad \text{から} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

などというように，タテ・ヨコに数を並べたモノを取り出すことができる。このようにして行列を次のように定める。

ヨコ並びの数を m 行，タテ並びの数を n 列並べたモノ

$$A=\left.\left(\overbrace{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}}^{n\text{列}}\right)\right\} m\text{行}$$

を $m\times n$ 行列と呼ぶ。

●第 i 行と第 j 列

ここでヨコ並びの1行目を取り出すと，

$$a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \quad \cdots \quad a_{1n}$$

となる。このように上から i 行目の成分を取り出した

$$a_{i1} \quad a_{i2} \quad a_{i3} \quad \cdots \quad a_{in}$$

を文字通り第 i 行，また，タテ並びの j 列目を取り出した

$$\begin{matrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{matrix}$$

を第 j 列と呼ぶ。

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \uparrow \\ \text{第 } j \text{ 列} & \end{array}$$

そして，第 i 行第 j 列の a_{ij} は $(i,\ j)$ 成分と呼ぶのである。

行列

と覚えれば，どっちが行でどっちが列かはっきりするだろう。

●ベクトルみたいに計算できる

たとえば 2×3 行列を 1 つ取ってみれば

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$$

となる。これは高校の数学 B で学んだベクトル

$$\vec{x}=(1,\ 2,\ 3)$$

によく似ており，実際ベクトルのように計算することができる。

例

$$a\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&-1&2\\-3&1&5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a&2a-b&3a+2b\\4a-3b&5a+b&6a+5b\end{pmatrix}$$

これを

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&-1&2\\-3&1&5\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}a&2a-b&3a+2b\\4a-3b&5a+b&6a+5b\end{pmatrix}$$

と書き換えれば，

$$aA+bB=C$$

となり，とてもなじみのある計算となる。

こうすれば，行列の世界にもベクトルのときと同じように**定数倍と和，差**をもちこむことができるのだ。

例題 1-1

次の方程式をみたす 2×2 行列 $X,\ Y$ を求めよ。

$$\begin{cases}X+2Y=\begin{pmatrix}-1&5\\3&4\end{pmatrix} & \cdots\cdots ① \\ 2X-Y=\begin{pmatrix}-2&0\\1&3\end{pmatrix} & \cdots\cdots ②\end{cases}$$

解答&解説 ①+②×2 より

$$5X=\begin{pmatrix}-1&5\\3&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4&0\\2&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&5\\5&10\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad X=\begin{pmatrix}-1&1\\1&2\end{pmatrix}$$

②から

$$Y=2\begin{pmatrix}-1&1\\1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2&0\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\1&1\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}-1&1\\1&2\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}0&2\\1&1\end{pmatrix}\quad\cdots\cdots(答)$$

●行列のかけ算

さて，足し算・引き算が考えられたのだから，次はかけ算を考えてみよう。はじめ行列について

$$\begin{cases}ax+by=p\\cx+dy=q\end{cases} \text{ を } \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$$

と表すことにしたのだから，ここで

$$ax+by$$

にあたるのは何かと考えると，$(a\quad b)$ と $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ がくっつくことで

$(ax+by)$ になるのだと解釈することで

積の基本

$$(a\ \ b)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=ax+by$$

を考え出すことができる。よって，

$$(a\ \ b)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=ax+by$$

$$(c\ \ d)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=cx+dy$$

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+by\\cx+dy\end{pmatrix}$$

であるとか

$$(a\ \ b)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=ax+by \qquad (a\ \ b)\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=au+bv$$

$$(a\ \ b)\begin{pmatrix}x&u\\y&v\end{pmatrix}=(ax+by\ \ \ au+bv)$$

といった張り合わせを考えるのは自然だろう。つまり，

$$\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\\text{ア}&\text{イ}&\text{ウ}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&\text{い}\\y&\text{ろ}\\z&\text{は}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+by+cz & a\text{い}+b\text{ろ}+c\text{は}\\dx+ey+fz & d\text{い}+e\text{ろ}+f\text{は}\\\text{ア}x+\text{イ}y+\text{ウ}z & \text{アい}+\text{イろ}+\text{ウは}\end{pmatrix}$$

のように，左辺の**左側の行列はよこベクトル積み上げ**，**右側の行列はたてベクトル並べ立て**をしてかけ算されると覚えておこう。

例題 1-2

次の各計算を実行せよ。

(1) $(1\ \ 2)\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix}1&2\\-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix}1&2\\-1&-2\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

(4) $(a\ \ b)\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$　(5) $(a\ \ b)\begin{pmatrix}p&p'\\q&q'\end{pmatrix}$

(6) $(a\ \ b)\begin{pmatrix}p&p'&p''\\q&q'&q''\end{pmatrix}$　(7) $\begin{pmatrix}1&2\\a&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

(8) $\begin{pmatrix}1&2\\a&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&p\\4&q\end{pmatrix}$　(9) $\begin{pmatrix}1&2&3\\a&b&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p&p'&p''\\q&q'&q''\\r&r'&r''\end{pmatrix}$

解答＆解説

(1) $1\times3+2\times4=11$

(2) $\begin{pmatrix}1\times3+2\times4\\-1\times3+(-2)\times4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\-11\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}1\times3+2\times4\\-1\times3-2\times4\\0\times3+0\times4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\-11\\0\end{pmatrix}$

(4) $ap+bq$

(5) $(ap+bq\ \ \ ap'+bq')$

(6) $(ap+bq\ \ \ ap'+bq'\ \ \ ap''+bq'')$

(7) $\begin{pmatrix}1\times3+2\times4\\a\times3+b\times4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\3a+4b\end{pmatrix}$

(8) $\begin{pmatrix}1\times3+2\times4 & 1\times p+2\times q\\a\times3+b\times4 & a\times p+b\times q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & p+2q\\3a+4b & ap+bq\end{pmatrix}$

(9) $\begin{pmatrix}p+2q+3r & p'+2q'+3r' & p''+2q''+3r''\\ap+bq+cr & ap'+bq'+cr' & ap''+bq''+cr''\end{pmatrix}$