

まえがき

本書の目的は、測度論というかなり高度な数学分野の内容を解説することですが、数学の専門家やそれを目指す人々ではなく、「確率」を扱うために道具として測度論が必要になる人々を対象としています。

多くの人は、確率論は数学の中で厳密さにやや劣る分野だと思っているのではないのでしょうか。実際、「確率」は中学生や高校生の数学の教科書に登場するものの、その扱いはあまり数学的ではない印象を持たざるをえません。おかげで中学や高校では数学が得意な人ほど確率を軽視し、あとで必要になったときには学習が難しいと感じる傾向があるようです。しかし実際は、確率論は厳密かつ純粋な論理を通して定義され、展開されている学問です。では、どうして学習が困難なのでしょう。

思うに問題は2つあります。第1に、「確率」が非常に根本的で、特に自然科学を学び研究する人全員にとって重要であること、そして第2に、確率論の基礎づけに必要な、測度論（ルベーグ積分論）が比較的新しく高度な数学分野であることです。前者のゆえに、中学や高校の教科書に含めざるをえないほど重要なのに、後者のゆえに、早い段階では必要な数学的道具を十分に説明できない。

たとえば情報科学の分野は、そもそもシャノンの情報理論のように確率と密接な関係があります。さらに最近では、機械学習の分野の急速な発展から、高度な確率論や統計学を用いる場面が多くなっています。しかも、計算機に実装する段階では有限の世界に落とし込むとはいえ、アルゴリズム上は確率分布の上の確率や、連続な確率過程に値をとる確率過程など、直観に基づく確率論を越える内容が増えていきます。

あなたは機械学習に興味があり、深層学習の論文を読んでいるとしましょう。あなたは、ふと、おかしいことに気づきます。たとえば、条件つき期待値の期待値をとるとはどういうことなのか？

このように、論文のいたるところで確率論の概念が自由自在に使われているにも関わらず、その概念を論理的には理解していないことにあなたは気づきます。これでは、内容を正しく理解できず、正しく実装できず、ましてや研究に値することはできそうもない。「口耳四寸の学」ではなくて、きちんと理解しなくては。そして、あなたは数学が得意な友人に質問して、驚くべきことを聞かされます。

彼女がいうには、条件つき期待値の概念は、ルベーク積分論のラドン-ニコディムの定理と同等であり、中でも高度なトピックに属する。数学科でも解析系の学生が高回生になって習うのだ、と。そして、あなたは書店で「ルベーク積分論」と題された教科書を探して、しばらく拾い読みしたあと、途方に暮れることとなります。

本書の目的はまさにこういう方々を対象に、測度論的な確率論の内容をできるだけやさしく、コンパクトに解説することです。特に、確率論を「道具として」使うために参照されることを意識しています。逆に、数学の専門家のための教科書であることは意図していません。そのため、定義や定理は明確に述べますが、定理の証明はその概念の理解に必要なとき以外は省略しています。それ以上を求める読者も、一度、本書で測度論の基本概念やストーリーを理解すれば、参考文献に挙げたような専門的な教科書で、詳しいトピックや細かい証明などを学ぶことが容易になるはずです。

本書の構成は以下のようになっています。まず、第0章は動機づけとして、確率を扱うためになぜ測度論が必要なのかを、19世紀に活躍したルイス・キャロルの考えた問題を題材に説明します。「不思議の国のアリス」で有名な作家の表の顔は数学の講師でした。彼は確率の問題をいくつか考え、発表していますが、現代的な考え方からすれば、見当違いや間違った議論が多々みられます。確率論が厳密に数学化されたのは、20世紀に入ってからののです。

第1章と第2章では、確率と期待値を定義します。これは測度論や積分論の文脈でいえば、(有限)測度の構成とルベーク積分の定義に相当します。確率論の視点からすると、考えたい確率の問題を数学的に正しくセットアップするための基盤作りです。

第3章では収束と極限についておさらいします。この内容は通常、微分積分学の講義の冒頭で扱うものですが、第4章での収束定理の議論、第6章での関

数空間の幾何学的な扱いに向けての準備になるでしょう。

第 4 章では、収束定理やフビニの定理などをまとめます。数学者にとってもしばしば、測度論や積分論は退屈なものですが、その御利益は甚大です。この章の目的は、そのような御利益の紹介です。

第 5 章では、条件つき期待値と条件つき確率を定義し、その性質を解説します。これは積分論でいえばラドン-ニコデムの定理に相当します。

第 6 章では、積分に関する基本的な不等式についてまとめます。不等式は解析学の核心であり、必須のテクニックです。また、関数のなす空間を幾何学的に調べる関数解析学の分野への簡単な入門にもなっています。

第 7 章では、確率論を道具として使うとき最低限必要とされる知識として、確率論の基本的な結果や、大数の法則や中心極限定理などを整理します。

確率論は豊かで広大な世界です。しかし、本書で最初のステップとして必要な部分はカバーできたのではないかと自負しています。皆さんがこの出発点から、確率論を単なる道具としてみるのみではなく、その豊穡な世界へと歩み出してくだされば、なお嬉しく、光栄に思います。

2017 年 小石川にて
原 啓介